DELLE

PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUINO

della Compagnia di Gesù

COLL' AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

della medesima Compagnia.

IN MILANO. MDCCLXVII.

Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.

Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

del problema a due incognite ; $ax + by = a^2$; $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$; 1.° Si maneggi una di queste equazioni, come non contenesse più d'una incognita ; dalla prima equazione, si avrà $x = \frac{a^2 - by}{a}$; 2.° Si sostituisca questo valore di x nella seconda equazione ; si avrà $\frac{ay}{c} = b - \frac{fa^2 - fby}{a^2}$; 3.° Sostituendo il valore di y, preso in questa equazione, nel valore di x trovato prima, si ha $x = a - \frac{b^2ca - bcfa}{a^3 - bcf} = \frac{a^4 - ab^2}{a^3 - bcf}c$.

Secondo metodo. Quando in ciascuna delle date equazioni si trovano le stesse incognite ; si prenda in ciascuna il valore d'una stessa incognita ; si faccia eguale il valore primo dell'incognita al secondo, il secondo al terzo . . . ec. ; si avrà un'equazione, ed una incognita meno delle prime ; su queste si operi allo stesso modo, e si ripeta la stessa operazione, fino ad avere una sola equazione, con una sola incognita ; il valore di questa, sostituito nella penultima, darà il valore d'un'altra incognita ; il valore di queste due, sostituito nelle altre, ci darà... ec. Nel proposto esempio. 1.° Si ha dalla prima equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$, e dalla seconda equazione si ha $x = \frac{abc - a^2y}{cf}$; 2.° Facendo un'equazione di questi due valori d'x si ha $\frac{a^2 - by}{a} = \frac{abc - a^2y}{cf}$; donde cavando il valore di y, e sostituendolo in uno de' valori di x, si avrà x.

Terzo metodo. Se le due equazioni a due incognite sieno tali, che i termini, che contengono la stessa incognita, presi senza segni, sieno identici, ed i termini, che contengono un'incognita abbiano lo stesso segno, mentre quegli, che contengono l'altra incognita hanno segni contrarj in amendue equazioni ; la somma delle date equazioni darà il valore d'un'incognita, e la differenza

 delle

delle medesime darà il valore dell' altra. Se nelle date equazioni vi sia bensì la detta contrarietà de' segni, ma l'identità manchi de' termini, si ridurranno essi all'identità uno per uno, multiplicando ciascuna equazione per il coefficiente dell' incognita dell' altra equazione. Se i termini della stessa incognita abbiano in amendue le equazioni gli stessi segni, o segni contrarj, si riducano, se fa bisogno, questi termini medesimi all' identità, ed in vece della somma, e sottrazione, si faccia una doppia sottrazione nel caso de' segni stessi, ed una doppia addizione nel caso de' segni contrarj. Questo metodo si stende, come gli altri due, a tre, a quattro.... equazioni formate da tre, da quattro.... incognite. Esempj. 1.º caso. $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$; fatta la somma di queste, si ha $2ax=c^2+n^2$ cioè $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$; e sottraendo una dall' altra, si ha $2by=c^2-n^2$, cioè $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$

2.º caso. $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$; multiplicando la prima equazione per m, e la seconda per b si ha $amx+bmy=mc^2$ $bnx-bmy=bn^2$; la somma di queste equazioni darà il valore di x; e multiplicando la prima delle date equazioni per n, e la seconda per a, la differenza delle equazioni, che ne risulteranno, darà il valore di y; cioè per avere il valore d'un' incognita, si rendon identici i termini, che contengon l'altra.

3.º caso. $ax+by=c^2$, $nx+my=n^2$; rendendo identico l'x, la differenza delle due equazioni darà l'y; e rendendo identico l'y, la differenza delle equazioni darà l'x; e se fossero date $-ax+by=c^2$, $+nx-my=n^2$; si faccia la somma delle equazioni, resi che siano identici i termini dell'x, o y, e si avrà y, o x.

83. Se il numero delle incognite fosse maggiore del numero delle equazioni, non si potrà determinare il loro valore, senza assumere ad arbitrio il valore di alcune incognite. Dato $3x+2y=4$, si avrà $x=\frac{4-2y}{3}$, e questo valore di x dipenderà dal valore arbitrario, che si dia ad y; cioè x avrà infiniti valori.

A SUA ECCELLENZA

IL SIG.

CARLO CONTE DI FIRMIAN

SIGNORE DI CRONMETZ MEGGEL

E LEOPOLDSCRON

CAVALIERE DELL' INSIGNE ORDINE

DEL TOSON D'ORO

PLENIPOTENZIARIO NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA

VICE-GOVERNATORE DI MANTOVA

SABIONETA E BOZZOLO

CONSIGLIERE INTIMO ATTUALE DI STATO

ec. ec. ec.

ECCELLENZA.

A *Una tenue, e poco pregevole operetta, qual si è questa mia, sembra, che mal si convenga il venire innanzi a V. E., e richiederla di sua protezione. Ma, qual ch' egli siasi il Libro, esso è*

a pur

pur Libro , che appartiene a ſcienza , e a quella ſingolarmente , la quale ſopra le altre tutte per maniera ſollevaſi , che il gran VVolfio non temè di dire Humanae eruditionis apicem conſcendimus Analyſim tradituri. *Ciò baſta , non ſolo perchè io punto non dubiti , che V. E. non ſia per accoglierlo favorevolmente, ma anche perchè io mi rechi a dovere il farlene offerta . Io non parlo qui , o Signore, nè dell' amore alle lettere , ed alle ſcienze , che in mezzo alle più ardue cure del Politico*

Governo le è indivisibil compagno, nè della deputazion luminosa, ch' Ella ha dall' Augustissima Nostra Sovrana riportato nella soprantendenza alla Regia Università di Pavia, e a tutte le Scuole della Lombardia Austriaca a V. E. incaricata. Sono, è vero, questi per me vivi stimoli a supplicarla di volere col patrocinio suo accordare a quest' opera mia quel pregio, che altronde non potrebbe sperare. Ma un altro motivo rammenterò io piuttosto, che a me in particolar modo appartiene, e non

ſarà, ſpero, a V. E. diſcaro. A giovamento di quegli principalmente, che intraprendono lo ſtudio delle ſcienze Aſtronomiche, ho io indirizzata queſta mia operetta: Perciocchè riflettendo, che queſta sì nobile ſcienza non ſi ferma più di preſente nelle ſemplici ricerche de' fatti, e nella ſola oſſervazione, e combinazion de' fenomeni, ma s'innoltra a eſaminare le cagioni, e da queſte ne trae le tante, ed in apparenza sì irregolari variazioni, con un continuo uſo, non ſolo della più ſublime geome-

tria,

trìa, ma ancor del calcolo, e in questo non delle semplici proporzioni, e progressioni, ma del più composto metodo delle interpolazioni, e di ogni specie di serie le più complicate, io ho intrapreso, e di acquistare per me, e di comunicare poscia agli altri, quelle cognizioni, che più vantaggiose a ciò fossero, e più necessarie. Nel che fare, quanto a ragione possa io lusingarmi di avere fatta cosa a V. E. gradita, agevolmente conoscerallo chiunque sa, e la premura, e l' impegno, ch' Ella ha in promuo-

vere

vere gli ſtudj di tale natura, ed il favore ſingolarmente da V. E. preſtato alla erezione di queſta noſtra Aſtronomica Specola. Queſto, o Signore, è ciò, che mi fa più d' ogn' altra coſa ardito di offerire a V. E. il preſente, qualunque ſia, frutto di mie fatiche; e pieno de' più ſinceri ſentimenti di riconoſcenza, e di ſommiſſione, col più profondo riſpetto mi proteſto

Di V. E.

Milano 23. *Ottobre* 1767.

Umiliſs., Divotiſs., Obbligatiſs. ſerv.
Franceſco Luino della Comp. di Gesù.

PREFAZIONE.

'Opera, che vi presento, o cortese Lettore, non vi suppone nè matematico consumato, nè affatto novizio nelle matematiche facoltà. Per amendue queste classi di persone si sono, ancora a' dì miei, pubblicati acconci trattati in ogni genere, ossia di calcolo, ossia spettanti a geometría; quando vi siate già altronde provisto di una cotale misura di notizie sul calcolo finito di Cartesio, e sull' infinito delle serie, credo, che dalla lettura della presente operetta ne potrete trarre vantaggio, e per riordinarvi in capo le cose quà e là lette sparsamente su altri Autori, e per promuovere più oltre le cognizioni vostre sull' arte analitica, e per addestrarvi eziandio alla invenzione di nuovi metodi pel calcolo più sublime. A questi tre fini io almeno ho indirizzata l'Introduzione, ed i due Libri, ne' quali è divisa questa mia operetta; non so poi se sarò stato bastantemente fortunato per conseguirgli.

Nella Introduzione vi piacerà forse il vedere ristrette in poche formole, universali, e chiare, tutte le note leggi del calcolo per ogni specie di quantità algebraiche, ed i migliori metodi per trasformare, e per iscioglíere le equazioni di diverso grado, che più frequentemente s' incontrano nella so-

luzione de' problemi. Fin qui però non v'ha nulla di nuovo, nè che sia da pregiarsi più che tanto seppure di ciò degna a taluno non sembri la trattazione sulle quantità positive, e negative, e sulle regole de' segni; le trasformazioni ne' radicali, e la stesa, che ho data al metodo del Varignon per la soluzione delle equazioni di grado più elevato del terzo. A vero dire, io mi sono determinato a pubblicare questo *Trattato del Calcolo algebraico* per modo d'introduzione al restante, non tanto per non obbligarvi a rivedere su altri Autori gli artifizj analitici, de' quali mi servo continuamente nel decorso, quanto perchè mi sembravano quelle tre materie trattate con qualche, non a tutti comune, eleganza, e precisione.

Nel primo Libro, in cui si parla delle progressioni geometriche, ed aritmetiche, incominciarete, spero, o Lettore, a sentire la fecondità, e l'importanza dell' analisi, ed acquisterete più giuste idee del legamento, ed unità delle parti, che la compongono. Trattano alcuni Autori la teoría delle progressioni indipendentemente dall' Analisi Cartesiana, a cui anzi la fanno precedere; ma le loro dimostrazioni restano sempre per ciò snervate, e languide, nè si sostengono che su certi metafisici raziocinj, non tanto facili a concepirsi, ed assai nojosi; io all' incontro dell' Analisi Cartesiana mi servo per dimostrarla, e su d'essa l' appoggio principalmente. La teoría delle proporzioni, e quella de'

lo-

logaritmi, tengono, dirò così, chiusa in mezzo la teoría delle progressioni, e stanno tutte e tre insieme unite per modo, che non si può degnamente trattare l'una senza l'altre. Nel Capo primo adunque di questo Libro, si parla delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche, e col perpetuo uso di formole assai vibrate, e strette, seguitate poscia, ed illustrate da riflessioni addattate, e da opportune spiegazioni, mi lusingo di poter rendere famigliare, e dolce all' iniziato Algebrista l'analitico linguaggio, a cui troppo è necessario, che s'avvezzi la fantasia, se pretende innoltrarsi ne' calcoli più profondi. Nel Capo secondo vedrete, dedotta tutta la teoría delle progressioni geometriche, ed aritmetiche da due soli, e semplicissimi principj, con accompagnamento copioso di teoremi, e problemi, e di formole ben dimostrate, ed universali. Pel terzo Capo ardirei quasi di assicurarvi, che la teoría de' logaritmi vi è messa nella possibile, miglior sua luce, a non dover dispiacere anche a' più intendenti. Ho presa da Eulero la più genuina, e più naturale idea de' logaritmi, che noi usiamo ne' calcoli; ma quanto io dica di più d'Eulero sulla loro natura, e sulla maniera d'usargli, agevolmente conoscerallo chiunque si vorrà prendere la briga di confrontare ciò, ch' io espongo, e dimostro *ex professo*, con ciò, che ha detto Eulero, che tratta questo punto sol di passaggio. Il metodo di evitare i logaritmi negativi, tanto utile pe' calcoli trigonometrici, mi è costato assai

 per

per ridurlo a quella ſimplicità, ed univerſalità, che non ſarà forſe facile ritrovare preſſo altri Autori.

Ma in queſto primo Libro, ſiccome ancora nell' Introduzione, non vi ſono che coſe elementari, e l'unico loro pregio, ſeppure ne hanno alcuno, ſi è che *non vi ſono trattate elementarmente*; quaſi tutte all' incontro le coſe, ch' entrano nel ſecondo Libro appartengono al calcolo ſublime, dove hanno il maggior ſuo uſo, ed ho procurato di maneggiarle, e di ſtenderle con quella preciſione, e ſcioltura di ſcrivere, che ad eſſe ſi conviene. Non v'ha teoría, che più naturalmente debba venir dopo quella delle progreſſioni, che la teoría delle ſerie, di cui quelle ne ſono il primo ramo; eppure quanto pochi ſi ſenton portati a ſtudiarla con applicazione? Ciò accade, parte per la difficoltà de' calcoli, pe' quali conviene pur paſſare per ben comprenderla, parte perchè non vedeſi di primo colpo a quale fine, e con quale profitto per l'altre parti della matematica ſi poſſa eſſa indirizzare. Ho ſtimato perciò, che riuſcirà coſa a tutti giovevole, ſe così tentaſſi di condurgli alla teoría delle ſerie, che inſieme reſtaſſero da ſe appianati queſti oſtacoli. Primamente mi fo a moſtrare ne' primi due Capi del ſecondo Libro, quanto frequentemente uopo ſia entrare ne' calcoli colle ſerie, e con quanta velocità ſi determinin con eſſe i valori delle incognite quantità, o delle quantità aſſai compoſte, che ad ogni paſſo è meſtieri introdurre nella ſoluzione de' problemi,

e delle

e delle equazioni algebraiche. Qui vedrete, o Lettore, trattata compiutamente l'evoluzione in serie delle potenze, e de' radicali, con metodi, altri presi da altri Autori, e da me ristretti in formole egualmente brevi, che universali; altri derivati da me col calcolo da que' primi, ed uno principalmente il più semplice, ed il meno avvertito, applicato distesamente a' numeri. Qui troverete innoltre sviluppati i metodi per l'evoluzione delle radici nelle equazioni composte, per l'evoluzione delle frazioni, finiti, ed infinitinomie ne' loro termini, per lo spezzamento delle frazioni volgari, e per il problema diretto, ed inverso delle frazioni continue. In tutte, ed in ciascuna di queste particolari trattazioni io penso d'avere e rischiarati, e messi in miglior ordine, e in varie guise aumentati, e distesi a più grande generalità diversi metodi fin qui conosciuti, ed usati ne' calcoli. Vorrei, che contaste trai primi un metodo della Signora Agnesi, per lo spezzamento delle frazioni, ridotto qui a' suoi veri principj, ed alla generalità, che troppo mancava all' esposizione dell' Agnesi. Il Capo terzo mette fine al mio lavoro: Si parla in esso della invenzione de' termini generali, e delle somme generali delle serie. Ognun sa quanto sia intralciata questa parte di matematica, e per la difficoltà dell' argomento, e per i moltiplici, e tutti da sublimi principj derivati metodi, de' quali l'hanno arricchita i più accreditati Scrittori. Io distinguo in tre classi le serie, cioè in serie

 arit-

aritmetiche , in serie geometriche , ed in serie composte dalle aritmetiche , e dalle geometriche ; assegno gl' infiniti diversi ordini , ne' quali si suddivide ciascuna classe , e per ciascuna classe espongo il metodo più acconcio , e più facile per trovare il termine , e la somma generale cercata. Vero è , che non mi sono divertito a formare a bella posta nuove serie intralciate , comunque di nessun uso , unicamente per avere il piacere di sommarle , o di trovare il loro termine generale ; ma oltrecchè altri l' hanno già fatto per me , a nessuno il divieto di farlo in avvenire ; io ho stimato di dovere andar dietro piuttosto all' utilità , che alla pompa . Quanto al metodo , egli è unico , e semplicissimo per tutte le serie sommabili , ma non è mio. Il celebre P. Riccati lo ha trovato , e svolto in tutte le sue parti nell' egregio suo Commentario sulle serie , pubblicato fino dall' anno 1756. , nè credo mi riprenderà di ardito , se vedrà , che dopo l' esposizione del suo Metodo , e dopo l' applicazione del medesimo alle dette tre classi di serie , io mi sono innoltrato a stendere alcune mie piccole osservazioni , indirizzate a renderlo più semplice , e spedito per la pratica : Tanto più ch' esse m' hanno servito a sciogliere per una strada , ch' io credo non ancora battuta da altri , il noto problema delle interpolazioni . Quante sono le serie , alle quali si stende il Metodo del P. Riccati , altrettante sono quelle , che s' interpolan col mio ; anzi dato il termine generale di qualunque
altra

altra ſerie , ſi trova il termine generale della medeſima ſerie interpolata , e ſe la ſerie è ſommabile ſi trova anche la ſomma generale della interpolata, trovata che ſia la generale ſomma della data . Voleva a tutto queſto aggiungere una copioſa applicazione di queſto Metodo all' Aſtronomía , ed eſporre gli uſi del medeſimo per la quadratura delle curve; ma queſta ſarebbe ſtata una digreſſione fuori di luogo , e l' opera , come ſta , mi pare , che vada dal ſuo principio ſino al fine ſufficientemente creſcendo colle dovute gradazioni .

IN-

INDICE.

INTRODUZIONE.

Calcolo Algebraico, e suo uso nella risoluzione delle equazioni.

LIBRO PRIMO.

Proporzioni, e Progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.

CAPO

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle serie.

AGGIUNTA.

JOANNES CAROLUS PINCETI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis.

CUM Librum, cui titulus est: *Delle Progressioni, e Serie*; a P. Francisco Luino Societatis nostræ Sacerdote compositum, aliquot periti Viri, quibus commissum fuit, recognoverint, & in lucem edi posse probaverint: facultate nobis a R. P. Laurentio Ricci Præposito Generali communicatâ, concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has literas manu nostra subscriptas, & sigillo Societatis nostræ munitas dedimus.

Mediolani die 17. Novembris 1767.

Loco ✠ Sigilli.

INTRODUZIONE.

CALCOLO ALGEBRAICO

E suo uso nella soluzione delle Equazioni.

CAPO PRIMO.

Delle quantità Algebraiche, e loro calcolo in generale.

Nozioni sulle quantità Algebraiche.

1. LE volgari cifre Arabiche 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. colle quali usasi per lo più calcolare i numeri, oltre il difetto di non essere atte ad esprimere che le quantità conosciute, rendono le operazioni del calcolo troppo prolisse, e confondono i passi delle operazioni medesime, compenetrando di mano in mano i valori de' risultati. Quindi è stato necessario esprimere e calcolare i numeri con altri segni che fossero più universali, e rendessero le operazioni del calcolo più spedite, e più chiare. Si sono assuefatti i Matematici alle lettere del Alfabeto: da principio esprimevansi con quelle cifre 1. 2. 3.... i numeri cogniti, e gli incogniti cogli $a.b.c...$, in seguito, ad esempio di Cartesio, i numeri cogniti s'incominciarono indifferentemente ad esprimere, o colle cifre 1. 2. 3..., o colle prime lettere dell'Alfabeto $a.\ b.\ c....$, e gli incogniti colle ultime $x.\ y....$ come si usa comunemente a' nostri dì. Il calcolo delle quantità numeriche così espresse, si chiama *calcolo Algebraico*, o *calcolo delle quantità Algebraiche*, per l'uso grande ch'egli ha nell'Algebra ancor più sublime.

2. Si

2. Si fanno adunque ſu queſte quantità le ſteſſe operazioni che ſi uſano ne' numeri. Coll' Addizione ſi cerca una quantità eguale ad altre quantità date, e preſe inſieme: Colla ſottrazione ſi cerca l'ecceſſo d'una quantità ſopra un' altra: Colla multiplicazione ſi cerca una quantità che così contenga una delle date, come nell'altra ſi contiene l'unità: Colla diviſione ſi cerca una quantità che così contenga l'unità, come in una delle date ſi contiene l'altra. Per indicare queſte operazioni del calcolo nelle Algebraiche quantità, ſi ſono poſti in uſo certi ſegni; per ſegno dell' Addizione ſi è ſcelto il $+$ che ſignifica *più*; per la ſottrazione il $-$ che ſignifica *meno*; per la multiplicazione il $\times$, oppure un punto che ſignifica *multiplicato per*; per la diviſione una linea di ſeparazione tralla quantità a dividerſi, e quella per cui ſi deve fare la diviſione ſcritta ſotto la prima, appunto come nelle frazioni numeriche; ſi uſano altresì due punti o il ſegno $\div$ poſto tralle due quantità date per la diviſione. Il ſegno $>$ meſſo tra due quantità indica che quella è maggiore verſo cui ſta rivolta l'apertura del ſegno.

$a + b$ ſignifica b congiunto ad a

$a - b$ ſignifica b ſottratto da a

$a \times b$, $a \,.\, b$, $a\,b$ } ſignifica a moltiplicato per b; nell'eſpreſſione $a\,b$ s'intende frappoſto il ſegno di multiplicazione.

$\frac{a}{b}$, $a : b$, $a \div b$ } ſignifica a diviſo per b

$a > b$ } ſignifica a maggiore di b

$a < b$ } ſignifica a minore di b

3 Le quantità a, b, c.... ſi chiamano quantità *incompleſſe ſemplici*; le $a\,b$, $a\,b\,c$..... ſi chiamano *incompleſſe compoſte*; ed una quantità formata da più quantità incompleſſe, ma inſieme con-

congiunte co' segni $+$ $-$, si chiama quantità complessa; sarà *binomia*, se sarà formata da due quantità incomplesse (ciascuna di queste si chiama *termine*) come $a + bc$; sarà *trinomia*, se sarà formata da tra termini come $ab - cd + f$; sarà ..; ec., e si chiamerà *finitinomia*, o *indefinitinomia* se sarà formata da un numero finito, o indefinito di termini. Termine *simile* ad un altro, significa termine formato dalle medesime lettere dell'altro, le quantità complessa *simile* ad un altra, è quella quantità in cui tutti i termini sono simili, rispettivamente ai termini dell'altra.

4. In ogni termine d'una quantità algebraica come $5\,a\,b\,x$ vanno distinti i *coeficienti* dagli *esponenti*. Quanto ai coeficienti: 1.° Altri sono coeficienti del termine, ed altri sono coeficienti di una o più lettere; i coeficienti del termine, altrimenti detti coeficienti *numerici*, sono que' numeri che precedono verso la sinistra qualunque quantità meramente algebraica; i coeficienti d'una o più lettere sono tutte le quantità, che con quell'una o più lettere formano il dato termine. Nel termine $5abx$, il numero 5 è coeficiente numerico del termine $5abx$; $5ab$ è coeficiente di x; $5ax$ è coeficiente di b; $5bx$ è coeficiente di a. 2.° Que' termini che non hanno altro coeficiente numerico, hanno almeno per coeficiente l'unità, così il coeficiente numerico di abx è 1, essendo abx eguale a $1\,abx$. 3.° La diversità de' coeficienti numerici non turba la somiglianza, o dissomiglianza di due termini; cioè per distinguere le quantità simili dalle dissimili, non si ha riguardo che alle lettere; $5\,a\,b\,x$ è simile ad abx.

5. Quanto agli esponenti. 1.° Altro è esponente dalle dimensioni d'un termine, altro è esponente dalle dimensioni d'una lettera del termine medesimo; esponente delle dimensioni d'un termine, è il numero che esprime di quante lettere è formato quel termine; il termine ab è di due dimensioni, perchè è formato di due lettere; abc è di tre dimensioni....... Questo nome di dimensioni è preso dall'analogía alla geometría, come si

vedrà a suo luogo. Alcuni chiamano *piano* il termine ab, chiamano *solido* il termine abc .. ec. Esponente delle dimensioni d'una lettera del dato termine, è il numero che esprime quante volte sia la data lettera ripetuta nel dato termine; nel termine $3aab$, l'esponente delle dimensioni di a è 2, e l'esponente delle dimensioni di b è l'unità. 2.° Quindi le dimensioni d'una lettera, o d'un termine, non dipendono da' coeficienti numerici. Se una lettera ha più d'una dimensione, si suole essa scrivere una sol volta, con alla destra in sito un po elevato l'indice delle sue dimensioni; invece di scrivere $3aab$, si scrive $3a^2b$; in certi casi è utile lo scrivere ancora l'unità per esponente delle dimensioni d'una semplice quantità incomplessa; *in vece di scrivere* $3a^2b$, si scrive $3a^2b^1$.

Origine, e natura delle quantità algebraiche positive, e negative.

6. Le quantità algebraiche che sono precedute alla sinistra dal segno + si chiamano quantità *affermative*, o *positive*, e quelle che sono precedute dal segno — si chiamano *defettive*, o *negative*. Ciò non basta per intendere a fondo la natura delle quantità positive e negative, e l'uso che si fa nell'algebra de' segni + —; prendiamo la cosa da' suoi veri principj.

7. Ad esprimere l'elevazione del Sole sopra l'Orizonte, si suole usare la serie naturale de' numeri 0. 1. 2. 3..... E' certo che quando il Sole sta all' Orizonte, l'elevazione sua sopra l'Orizonte è nulla, o zero; quando s'è alzato sopra l'Orizonte d'una determinata quantità presa per unità di paragone, per esempio d'un grado, la sua elevazione si può chiamare 1, e corso ch' egli abbia, alzandosi sempre più, un altro grado, la sua elevazione sarà 2, e così nel resto. Ad esprimere l'abbassamento del Sole sotto l'Orizonte, si può usare la stessa serie, essendo zero il suo abbassamento quando egli sta all' Orizonte, potendosi prendere

per

per 1 il suo abbassamento, quando egli si sia depresso d'un grado.... ec.

Quindi volendo riferire l'alzamento e l'abbassamento del Sole rispetto all' Orizonte alla medesima misura di gradi d'un circolo, dinotati successivamente co' termini della serie naturale o. 1. 2. 3...; si avrà sempre un' espressione ambigua, non intendendosi dal numero, per esempio, di 3 gradi, che il Sole si sia alzato o abbassato rispetto all' Orizonte di gradi tre. I numeri hanno costantemente la loro significazione assoluta di 3, di 4...., e da se non portano in conto alcuno la relativa d'essere l' 1 . 2...., preso piuttosto in questa, che in quella direzione, se non per qualche segno ad essi estrinseco, e preso ad arbitrio.

Per determinarla in qualche modo al numero de' gradi del moto, diretto ad una parte, si mette verso la sinistra il segno +, e quel numero de' gradi si chiama *positivo;* al numero de' gradi del moto, indirizzato alla parte opposta si mette verso la sinistra il segno —, e quel numero de' gradi si chiama *negativo*. Così il numero per se stesso esprimerà la quantità del movimento; il segno premesso al numero indicherà la direzione del movimento medesimo ad una delle parti opposte. Si dica lo stesso delle altre quantità (per esempio de' crediti e debiti d'un mercante; della sanità, o infermità di un cittadino...) che hanno tra se qualche opposizione, secondo un certo risguardo, non esprimibile da' puri numeri.

8. Quando due quantità sono tra se opposte secondo qualche rispetto, la prima esclude e nega l'altra secondo il rispetto medesimo; quindi la prima ha tratto il nome di quantità negativa, e la seconda di positiva. Ma siccome due quantità tra se opposte secondo qualche rispetto, si escludono e negano vicendevolmente secondo quel rispetto medesimo, si può prendere o l'una o l'altra per positiva, come più piace. Nell' esempio dell' elevazione o abbassamento del Sole, rispetto all' Orizonte, tanto il primo

si op-

ſi oppone al ſecondo, quanto queſto al primo movimento; amendue, o piuttoſto qualſivoglia dei due ſi può prendere per poſitivo, laſciando l'altro per negativo. Ordinariamente tralle quantità così oppoſte, ſi prende per poſitiva quella che ſi preſenta più naturalmente a conſiderarſi la prima; così l'elevazione del Sole ſopra l'Orizonte ſi ſuole prendere per movimento poſitivo, e l'abbaſſamento per negativo.

9. Non tutte le quantità hanno le ſue oppoſte, e quantunque una quantità abbia la ſua oppoſta, non è neceſſario di conſiderare queſta oppoſta quantità. Le quantità numeriche, in quanto ſono tali, non hanno quantità a ſe oppoſte; non il zero, che per non eſſere quantità non può dirſi oppoſto alle quantità; non le quantità minori del zero, che per non dare di ſe idea alcuna chiara e diſtinta, non poſſono neppure avere l'eſiſtenza nella immaginazione; non.... ec. Si può all'incontro conſiderare un alzamento del Sole ſecondo il ſuo accreſcimento numerico qualunque, ſenza avere alcun riſguardo alla quantità oppoſta, cioè all' abbaſſamento del Sole riſpetto all' Orizonte medeſimo: quando però ſi dice $-a$, queſta quantità non ha il ſuo eſſere di *meno*, che per l'apporſi che fa al $+a$. Quindi 1.° non tutte le quantità, in quanto ſono tali quantità, poſſono avere i ſegni $+ -$, e le quantità, che non hanno il ſegno $-$ non ſempre ſono quantità poſitive, cioè non ſempre racchiudono nella loro idea l'oppoſizione ad altre quantità, nè ſi chiamano poſitive, ſe non perchè vengono conſiderate e poſte, dirò così, da ſe ſteſſe; propriamente dovrebbono chiamarſi *puri numeri*. 2.° Le quantità, che hanno il ſegno $-$ ſempre ſono quantità negative, cioè ſempre, e neceſſariamente preſuppongono, o importano l'idea d'oppoſizione ad altre quantità, nè ſono puri numeri, nè ſi ha di eſſe idea alcuna, ſe non vi s'attacchi qualche idea d'oppoſizione ad altre quantità. 3.° Tanto le quantità poſitive $+a$, quanto le negative $-a$ ſono quantità reali; da che $+a$ $-a$ non differiſcono, che ne' ſegni,

segni, i quali non mutano la natura di *a*, ma solamente *dinotano una diversa denominazione ad esso estrinseca*, di direzione diversa... ec.

Regole de' segni + — *nel Calcolo delle quantità positive, e negative.*

10. DAl fin qui detto è manifesto, che la quantità positiva, o negativa porta seco due stati; cioè lo stato di *numero*, e lo stato di *qualche* opposizione o contrarietà; secondo il suo stato numerico, essa è una tale o tale altra quantità, 1. 2. 3... ec., secondo il suo stato di opposizione (che ben si può chiamare stato *specifico*) è di più *una cert' altra cosa opposta ad un' altra simile*, che per avventura si scuopra in una nuova data quantità. Lo stato numerico d'una quantità si dinota co' numeri 1. 2... ec.; lo stato specifico della medesima si indica co' segni + —. Quindi nel calcolo delle quantità positive o negative, oltre al trovare i risultati delle date quantità considerate nel loro stato numerico, è mestieri assegnare lo stato specifico, in cui collocare si debbano i risultati, cioè il segno + o — da premettersi ai medesimi. Lo stato numerico de' risultati si conosce dalle regole ordinarie del calcolo; lo stato specifico de' medesimi si conoscerà dalle regole seguenti.

11. Regole de' segni. 1.° La quantità negativa aggiunta ad una negativa, la aumenta nella sua negazione, sottratta la scema. 2.° La quantità negativa aggiunta ad una positiva la scema nella sua posizione, sottratta la aumenta. 3.° La quantità positiva aggiunta ad una negativa la scema nella sua negazione sottratta la aumenta. 4.° La quantità positiva aggiunta ad una positiva la aumenta, sottratta la scema. 5.° La quantità negativa di una negativa, o la positiva di una positiva *è una quantità positiva*, come pure la quantità positiva della negativa, o la negativa di una positiva *è una quantità negativa*. Quest'ultima proprietà delle quantità precedute da segni + e — si può esprimere così:

$--=+$ .. meno il meno dà più
$++=+$ .... più il più dà più
$-+=-$ ... meno il più dà meno
$+-=-$ .... più il meno dà meno.

Tutte queste regole de' segni sono conseguenze manifeste dall' idea di opposizione che regna nelle quantità precedute da' segni $+$ e $-$; basterebbe applicarle a qualche esempio d'alzamento e d'abbassamento del sole rispetto all'orizonte, per renderle chiare e palpabili anche alle persone più rozze, e volgari. Quale è lo stato contrario al *discendere?* certo è l'*ascendere;* ciò intendo di dire quando noto che *meno il meno da più;* qual è.... ec.?

12. Quindi, e dalla natura della multiplicazione e divisione si hanno le regole de' segni per la multiplicazione, e divisione delle quantità positive e negative, cioè:

$$-\overset{\times}{\div}-=+ \qquad -\overset{\times}{\div}+=-$$
$$+\overset{\times}{\div}+=+ \qquad +\overset{\times}{\div}-=-$$

ossia i segni simili danno *più*, i segni dissimili danno *meno*. Imperciocchè; il multiplicatore non mostra solamente quante volte si debba a se stesso aggiungere il multiplicando, ma in quale stato ancora si debba riporre il prodotto; ed il divisore non solamente indica qual parte si debba prendere del dividendo, ma in quale stato si debba riporre questa parte medesima; conseguentemente, dovendosi questo stato intendere in ordine a quello in cui già si ritrova il multiplicando ed il dividendo, se essi sieno negativi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del negativo, cioè positivo, e se si debbano collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del negativo, cioè negativo. Se il multiplicando ed il dividendo sieno positivi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del positivo, cioè negativo, e se si deb-

ſi debbono collocare in uno ſtato poſitivo, avranno uno ſtato poſitivo del poſitivo, cioè poſitivo. Quindi lo ſtato del prodotto $a\ b$ di $-a \times -b$ ſarà $- - = +$

di $-a \times +b$ ſarà $+ - = -$

di $+a \times -b$ ſarà $- + = -$

di $+a \times +b$ ſarà $+ + = +$. Lo ſtato del quoto $\frac{a}{b}$ per ..., ec.

13. Quindi. Nella multiplicazione; 1.º Se il multiplicatore ſarà negativo, il prodotto avrà un ſegno contrario a quello del multiplicando. 2.º Se il multiplicatore ſarà poſitivo, il prodotto avrà il ſegno del multiplicando. 3.º Se le quantità a multiplicarſi ſaranno pari in numero, e ciaſcuna negativa, il prodotto ſarà poſitivo. 4.º Se ſaranno impari, e ciaſcuna negativa, il prodotto ſarà negativo. 5.º O ſieno pari, o ſieno impari in numero le quantità poſitive, il loro prodotto ſarà ſempre poſitivo.

Nella diviſione. 1.º Se il dividendo ſarà negativo, il ſegno del quoto ſarà contrario del ſegno al diviſore. 2.º Se il dividendo ſarà poſitivo, il ſegno del quoto ſarà conforme al ſegno del diviſore. 3.º ... ec. Queſte ed altre ſimili annotazioni, ſe non ſervono alla pratica del calcolo, ſervono a meglio conoſcere la natura de' ſegni.

14. Ma, come va (dicono alcuni) che i ſegni $+ -$ ſi uſano da' Matematici (e noi pure lo abbiamo indicato al num. 2.) per l'addizione e ſottrazione de' numeri? che hanno eſſe mai di comune le quantità aggiunte o ſottratte, colle quantità poſitive o negative? quali ſaranno le regole de' ſegni nel calcolo, non delle quantità poſitive e negative, ma delle quantità aggiunte e ſottratte? Queſti ſono i nodi, da' quali non ſanno ſvolgerſi i meno eſperti.

Due però ſono le riſpoſte: 1.º La natura de' numeri non eſige che vengan eſſi ad altri aggiunti o ſottratti; dunque il conſiderare i numeri nello ſtato di addizione o ſottrazione riſpetto ad altri numeri, è un fiſſare a' numeri medeſimi un nuovo ſtato ad eſſi eſtrinſeco; ſtato, che conſiderato in ordine

all' effetto che produce nelle quantità, alle quali vengono aggiunti, o dalle quali si sottraggono, è in se stesso perfettamente opposto. Certo che altra è la mutazione introdotta in una quantità per l'addizione, altra è quella che in essa si genera per la sottrazione d'un' altra quantità, e la prima è affatto opposta alla seconda: Se la prima è mutazione in accrescimento, che si può dire mutazione *in più*; la seconda è mutazione di scemamento, che si può dire mutazione *in meno*; dunque i numeri in quanto aggiunti ad altri si possono, e si devono considerare come quantità positive, in quanto da altri sottratti si possono, anzi si devono considerare come quantità negative; dunqne a quegli si dovrà premettere il segno +, a questi il —, e si dovranno maneggiare nel calcolo come le altre quantità positive e negative. Quindi è manifesto, che il calcolo delle quantità aggiunte o sottratte, non è che un *ramo* del calcolo delle quantità positive e negative; i segni + e — sono segni proprj a denotare lo stato di contrarietà, che regna tra due quantità date (queste quantità sono il *genus*), e per parità di ragione si devono appropriare alle quantità aggiunte e sottratte, che sono *species* di quelle prime.

2.° Si astragga per poco la mente da ciò che si è detto sulla natura delle quantità positive e negative, e sulle regole de' segni + —. Sia il + un mero segno arbitrario dell' addizione, ed il — un segno arbitrario della sottrazione; cerchiamo quali sieno le regole da osservarsi nel calcolo per le quantità insieme congiunte, o sottratte con questi segni.

Nella sottrazione. Sottraendo 14—3 da 25, si ha 25—(14—3) =25—14+3. Imperciocchè dal numero 25 non vuolsi sottratto tutto il numero 14, ma il 14 sminuito di 3; dunque troppo piccolo è il residuo 25—14, e tanto più piccolo, quanto il minutore 14 è più grande del dovere, cioè il residuo 25—14 è più piccolo di 3 di quello dovrebbe essere; dunque per avere il vero residuo di 14—3 sottratto da 25, conviene aggiungere 3 a 25—14;

dunque

dunque $25-(14-3)=25-14+3$. Quindi $-+=-$
$--=+$

similmente si avrà $25+(14-3)=25+14-3$; cioè $++=+$
$+-=-$

Nella multiplicazione. Multiplicando $14-3$ per $5-2$, si ha $(14-3)\times(5-2)=(14\times5-3\times5)+(3\times2-14\times2)$. Imperciocchè, se il multiplicatore fosse l'intero numero 5, il prodotto sarebbe $(14-3)\times5$; cioè non sarebbe l'intero numero 14, che dovrebbesi multiplicare per 5, ma il numero 14 sminuito di 3; dunque multiplicando 14 per 5 si multiplicherebbe per 5 anche il 3 che sta, e non dovrebbe esservi, nel numero multiplicando; dunque 14×5 sarebbe maggiore del dovere di tutto il numero 5×3; dunque il prodotto vero sarebbe $14\times5-5\times3$. Non è il numero intero 5 che devè multiplicare $14-3$, ma il numero 5 sminuito di 2; dunque nel prodotto $14\times5-5\times2$ c'è di più il prodotto di $14-3$ multiplicato per 2; dunque per avere il vero prodotto di $(14-3)\times(5-2)$ si deve dal prodotto $14\times5-5\times2$ sottrarre il prodotto di $(14-3)\times2$, cioè si deve sottrarre $14\times2-3\times2$; dunque, per le regole date nell'esempio della sottrazione, il vero prodotto sarà $(14\times5-5\times3)+(3\times2-14\times2)$.
Quindi $+\times+=+$; $-\times+=-$;
$-\times-=+$; $+\times-=-$. Un simile discorso vale per la divisione.

15. Ecco adunque, che prendendo per segno arbitrario dell' addizione il $+$, e della sottrazione il $-$, dalla sola natura delle operazioni aritmetiche si hanno per il calcolo delle quantità sommate, e sottratte le stesse regole, che si ebbero già per le quantità positive e negative; dunque, quantunque le quantità sommate e sottratte non fossero da annoverarsi tralle quantità positive e negative, si dovrebbero maneggiare nel calcolo come le quantità positive e negative; cioè comunque diversi da $+-$ fossero i segni dell' addizione e sottrazione, le loro regole nel cal-

 colo

colo farebbero fempre analoghe alle regole de' fegni + — prefi per le fole quantità pofitive e negative; dunque e fi poffono prendere quefti fegni + — per indicare la fomma e la fottrazione, e fi poffono, alle quantità fommate e fottratte, adattare le regole de' fegni, dedotte prima per le quantità pofitive e negative.

16. La prima rifpofta è più decifiva, e leva ogni imbarazzo ne' calcoli; chi foftiene l'altra, dovrà in primo luogo fempre diftinguere due generi di quantità pofitive e negative; cioè quello che viene dalla oppofizione di ftato, e quello che nafce dall' addizione e fottrazione delle quantità date. 2.° Dovrà nella rifoluzione de' problemi efaminare ogni rifultato che abbia il fegno —, per conofcere fe abbia quefto fegno perchè fi richiami all' oppofizione d'un' altra quantità fimile che fia ftata prefa per pofitiva, o perchè ciò portino folamente le regole dell' addizione e fottrazione. Nel primo cafo faprà l'ufo che deve farfi del rifultato, non lo faprà nel fecondo, o fe voglia anche nel fecondo cafo adattarvi le regole del primo, contraddirà col fatto alla fua dottrina. 3.° Commetterà poi un errore inefcufabile e pericolofo, fe vorrà ridurre l'idea delle quantità pofitive e negative del primo genere, all' idea delle quantità fommate, o fottratte, quafi che quella dipenda da quefta. E' vero che il numero —3 gradi di elevazione del Sole fi ha aggiungendo 8 gradi d'abbaffamento, a 5 gradi d'elevazione del Sole medefimo, ma non è neceffario per avergli ricorrere a quefta fomma; cioè a dire, è poffibile, ma non è neceffario, che quel —3 venga da un' addizione.

Riduzione delle quantità algebraiche.

17. LA *riduzione* delle quantità algebraiche confifte nel difporre col miglior ordine, e fotto la più fempliee efpreffione, le quantità algebraiche o date o trovate colle confuete operazioni del calcolo. Si offervino perciò le regole feguenti:

Re-

Regola prima. Le lettere di ciascun termine si dispongano più che si può coll' ordine alfabetico.

Regola seconda. I termini delle quantità complesse si ordinino relativamente alle dimensioni di qualche lettera.

Regola terza. Si riducano ad una sola le quantità incomplesse simili, che per avventura si trovino co' segni simili in una complessa quantità data, e si ommettano quelle, che si distruggono o si elidono co' segni contrarj.

Regola quarta. Si conservi in ciascun termine la legge degli omogenei.

18. Per riguardo alla prima regola, è chiaro, che la quantità $acfbd$ si deve scrivere così $abcdf$, succedendo all' a nell' ordine alfabetico il b, e non il c, nè al b l'f, ma il c... ec S'è detto, che devonsi così disporre le lettere *per quanto si può*; cioè a dire quando ciò non turbi la seconda regola dell' ordinare le quantità complesse.

19. Per osservare con facilità questa seconda regola, si ordini primamente ciascun termine della quantità data per risguardo ad una lettera comune a molti; poi si passi ad ordinare i termini tra se, per risguardo alle dimensioni della lettera ordinante. Mi spiego: Nella quantità complessa $a^3 - 3abc + b^2c + 2a^2c - a^2b$ io osservo, che la lettera a è in tutt' i termini, fuorchè nel terzo; prendo ad arbitrio questa lettera a per distintivo de' termini medesimi, e sì gli dispongo, che la lettera a stia in ciascuno di questi più verso la mano destra, che non le altre; scrivo a cagione d'esempio non $-a^2b$, ma $-ba^2$; non $-3abc$, ma $-3bca$..., così sarà ordinato ciascun termine della quantità proposta. Per ordinare tra di loro i termini medesimi, scrivo per primo termine verso la sinistra quello, in cui la lettera a si trova alla maggior dimensione; scendendo verso la destra scrivo quello, in cui quell' istessa lettera a si trova alla dimensione prossimamente minore della prima...., e così successivamente, fino a quegli

che

che non contengono la lettera a; questi saranno gli ultimi. Ordinando la predetta quantità complessa, si avrà $a^3 + 2ca^2 - ba^2 - 3bca + b^3$.

20. Nelle quantità così ordinate per rapporto alle dimensioni d'una lettera, si chiama *termine* il complesso di tutte quelle quantità incomplesse, in cui la lettera che le distingue, ascende al medesimo numero di dimensioni, e tutte queste quantità incomplesse, si scrivono l'una sotto l'altra; la quantità precedente conterrà dunque soli quattro termini, e si scriverà così

$$\begin{array}{l} a^3 + 2ca^2 - 3bca + b^3c; \\ \quad - ba^2 \end{array}$$

per non iscostarsi dalla deffinizione della parola *termine* data sopra, si consideri l'aggregato di tutte le quantità incomplesse che stanno a sinistra di a^2 nella quantità così ordinata, come coeficiente di a^2; si vedrà in appresso che si ha $2ca^2 - ba^2 = (2c - b)a^2$.

21. Talvolta gli esponenti delle dimensioni della lettera che distingue i termini non vanno da sinistra a destra sminuendo successivamente d'un unità. In questo caso, se sia eguale la differenza del primo esponente al secondo, del secondo al terzo, ... si supporrà bene ordinata la quantita data, altrimenti si metterà frammezzo un asterisco *, o un altro segno simile per supplire le veci del termine che manca: la quantità $a^6 + b^3a^4 - b^4a^2 + b^6$. è bene ordinata per a, ma ordinandola per b, si avrà $b^6 * - a^2b^4 + a^4b^3 * * + a^6$, ed in questa quantità, il secondo, il quinto, ed il sesto termine sono eguali a zero, o più veramente a $\pm$ zero multiplicato per b^5 nel secondo, per b^2 nel quinto, e per b^1 nel sesto termine.

22. E' manifesto che la terza regola per le riduzioni abbraccia tre casi. 1.° Le quantità incomplesse simili, che hanno il medesimo segno, si riducono ad una sola che ha il segno comune alle date, e per coeficiente la somma de' coeficienti delle medesime. La quantità $2a^2 + 3b + a^2$ si riduce a $(2+1)a^2$

+

$+ 3b = 3a^2 + 3b$. 2.° Se queſte incompleſſe quantità ſimili hanno i ſegni contrari, il ſegno della quantità maggiore ſarà il ſegno della ridotta, che avrà per coeficiente la differenza de' coeficienti delle quantità date. La quantità $3ab^3 + 2ab^2 - ab^3$ ſi riduce a $(3-1)ab^3 + 2ab^2 = 2ab^3 + 2ab^2$. 3.° Quindi ſe i coeficienti delle quantità ſimili che hanno i ſegni contrarj ſono tra ſe eguali, ſi ommettono interamente le quantità date; $3ab + 2cd - 3ab = 2cd$.

23. Si dicono di *dimenſioni omogenee* quelle quantità incompleſſe, che hanno il medeſimo numero per eſponente delle dimenſioni; di *dimenſioni eterogenee* le altre. La quantità ab è omogenea a cd, e ſiccome detto è, che i coeficienti non mutano le dimenſioni d'una quantità, così non ne turbano l'omogeneità, o vi ſiano, o manchino nelle quantità date; $4ab$ è omogeneo con $10cd$. Quindi in una equazione ſono omogenei i termini che la compongono, quando la ſomma delle dimenſioni delle lettere in ciaſcun termine, è egnale alla ſomma degli eſponenti delle lettere negli altri. L'equazione $a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ è omogenea. E' molto neceſſario, maſſime nella ſoluzione de' problemi, il rendere omogenei tutt' i termini d'un equazione, o d'una compleſſa quantità; ciò ſi chiama *conſervare*, ovvero *oſſervare la legge degli omogenei*.

24. Due ſono i metodi più uſati per ridurre all'omogeneità i termini d'una data quantità compleſſa. Primo metodo, per mezzo dell'unità. Si moltiplichi il termine che ha minori dimenſioni, o ſi divida quello che ne ha maggiori, per l'unità, fatta eguale a qualche lettera che non entri nella quantità data, o che tralle date ſi poſſa prendere per l'unità. A rendere omogenei i termini di $abc + cd$, ſi multiplichi cd, o ſi divida abc per $f = 1$; ſi avrà nel primo caſo $abc + cdf$, e nel ſecondo caſo $\frac{abc}{f} + cd$.

o che

Secondo metodo, per mezzo delle sostituzioni. Egli è chiaro, anche senza avvertirlo, che in una quantità qualunque, invece d'una o più lettere, se ne può inserire una o più altre, che sieno, o si suppongano eguali a quelle; appunto come se la distanza da un luogo ad un altro sia di due tese lineari, si può egualmente dire che è di dodici piedi lineari. Su questo principio (chiamato *principio di sostituzione*) si fondano tutte quasi le regole dell' Analisi; vero è che per fare le sostituzioni nelle quantità algebraiche, è uopo sapere prima il calcolo delle medesime; ma noi accenniamo qui il metodo di cui abbisogniamo nel decorso, la pratica la riservi ciascuno a miglior luogo. Nella quantità $a + bxy \div cx^2 y^2 + ex^3 y^3$, si faccia $y = \frac{x}{z}$ si avrà $a \div \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{z^2} + \frac{ex^3}{z^3}$ quantità omogenea; nella quantità $x^2 + z^2 + az$, si faccia $z^2 = y^2$, sarà $x^2 + y^2 + az$ quantità omogenea ... ec. Colle sostituzioni si rendono omogenei i termini massime nelle equazioni, col cambiare gli esponenti della equazione proposta, con una certa legge; e si può determinare in quai casi, e con quali sostituzioni si debbano o possano fare somiglianti trasformazioni, ciocchè non si può qui spiegare più a lungo.

25. Resta a dimostrare, che ne' metodi precedenti le quantità $\frac{bx}{z}$, $\frac{cx^2}{z^2}$, e simili siano d'una sola dimensione, e lo stesso argomento varrà per gli altri casi. Ciò dipende dal teorema generale per trovare l'esponente delle dimensioni d'una frazione algebraica; egli è il seguente. L'esponente delle dimensioni di una frazione algebraica è eguale al residuo, che si ha sottraendo l'esponente delle dimensioni del denominatore dall' esponente delle dimensioni del numeratore; questo teorema si dimostra facilmente così: ab, che è un prodotto de' due fattori a, b, è di due dimensioni, e se si divida ab per uno de' fattori a, resta b

per

per quoziente che è d'una sola dimensione; dunque quante sono le dimensioni al denominatore d'una frazione, altrettante se ne elidono al numeratore, e l'esponente delle dimensioni residue è la differenza de' detti esponenti; dunque le dimensioni d'una frazione sono indicate dalla detta differenza; quindi è, che essendo due le dimensioni al numeratore di $\frac{bx}{x}$, ed una al denominatore, l'esponente delle dimensioni di $\frac{bx}{x}$ sarà $2-1$, cioè l'unità, e così nel resto.

26. Si noti 1.° Che se il denominatore avrà più dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni delle frazioni sarà negativo; e se il denominatore avrà egual numero, o un numero minore di dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni della frazione sarà zero, o positivo. Le frazioni d'esponente negativo si chiamano, da Eulero, e da altri, *frazioni proprie*. 2.° Che colle regole date, ed applicate solamente alle quantità incomplesse, si conosce l'esponente delle dimensioni d'una quantità complessa; il numero de' fattori, che la compongono, (che sono rappresentabili da a, b, c, ec.) è l'esponente delle sue dimensioni. Dimostreremo altrove, che in una quantità omogenea, ed ordinata per una lettera, il numero de' fattori componenti è eguale all'esponente massimo di quella lettera; così $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$ è di tre dimensioni. 3.° Quindi si ha l'esponente delle frazioni, che hanno per numeratore, e per denominatore una quantità complessa.

CAPO SECONDO.

Leggi del Calcolo nelle quantità algebraiche.

Calcolo nelle quantità intere.

27. ADdizione. Si fcrivano tutte le date quantità in una fola ferie, da finiftra a deftra, ritenendo il fegno dato a ciafcun termine; fi facciano fu quefta ferie le riduzioni del n. 22. Per fommare $a+bc$ con $bc-a$, fi fcriva $a+bc+bc-a$, e riducendo fi avrà $2bc$.

28. Sottrazione. Si mutino tutti i fegni nel minutore, e fi fommino infieme tutte le date quantità. Per fottrarre $ac-b$ da $d+b+ac$, fi mutino i fegni ad $ac-b$, e fommando $-ac+b$ con $d+b+ac$, fi avrà $d+2b$.

29. Multiplicazione. Per le quantità incompleffe, conviene trovare il prodotto delle lettere, il prodotto de' coeficienti numerici, ed il fegno da premettervi. Per le lettere, bafta congiungere le lettere delle quantità a multiplicarfi colle lettere dell' altra quantità, fenza interporvi alcun fegno; per i coeficienti numerici fervono le regole della volgare aritmetica ne' numeri; per i fegni ritenganfi le regole fopra dimoftrate, cioè che il fegno del prodotto è $+$, fe fono fimili i fegni delle quantità date, e che il fegno del prodotto è $-$ fe i fegni delle date quantità fono diffimili. Multiplicando $4bc$, offia $+4bc$ per $-5ad$, fi avrà 1.° Per le lettere $bc\times ad=abcd$; 2.° Per i coeficienti $4\times5=20$; 3.° E per fegno del prodotto $20abcd$ fi ha $-\times+=-$; cioè $4bc\times-5ad=-20abcd$.

Per le quantità compleffe, finitinomie, ed indefinitinomie. Si multiplichino colle regole precedenti tutt' i termini d'una delle date quantità per ciafcun termine dell' altra; fi faccia la fomma di tutt' i parti-

particolari prodotti. Multiplicando $a-b$ per $c+d$, si avrà $(a-b)$ $(c-d)=(a-b)\times c+(a-b)\times -d=(ac-bc)+(bd-ad)$.

30. Divisione. Per le quantità incomplesse. Il coeficiente numerico del quoziente, si ha colle regole dell'aritmetica numerica; il segno del quoto si ha come nella multiplicazione; per le lettere; si scrivano le lettere del divisore sotto le lettere del dividendo a modo di frazione; si scancellino le lettere comuni ad amendue i termini; così $+6bc$ diviso per $-3c$, dà per segno del quoto $+\div-=-$; per coeficiente del quoto $\frac{6}{3}=2$, e per le lettere $\frac{bc}{c}=b$; cioè $6bc\div-3c=-2b$. Ho detto di scancellare le lettere comuni; dacchè è evidente, che bc è eguale a b multiplicato per c; dunque dividere bc per c significa dividere un prodotto per uno de' suoi fattori, che anche nella aritmetica numerica dà l'altro fattore per quoto.

Per le quantità complesse finitinomie. Si ordini il dividendo ed il divisore per una istessa lettera; si divida il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore; si sottragga dal dividendo, il prodotto del quoto in tutto intero il divisore; e sulle quantità residue si rifaccia la stessa operazione, fino ad avere zero per residuo, o una quantità non più divisibile per il divisore, da scriversi a modo di frazione a compimento del quoto, come ne' numeri. A dividere a^2-b^2 per $a+b$, stando amendue le quantità ordinate per a; si divida il primo termine a^2 del dividendo per il primo termine a del divisore, e si scriva a per quoto; sottraendo da a^2-b^2 il prodotto di $a+b$ in a, si ha $-ab+b^2$ per residuo, su cui operando come se fosse un nuovo dato dividendo, si avrà $-b$ per secondo ed ultimo termine del quoziente.

Per le quantità complesse infinitinomie. Si stabilisca prima d'ogn'altra cosa il numero de' termini, che si vogliono avere nel quoziente, e si scrivano altrettanti termini del dividendo A, e del divisore B al luogo della divisione; si ordinino al contrario delle quantità finite (cioè si metta per primo termine quella quantità

 in-

incompleſſa, in cui la lettera, che diſtingue i termini, aſcende al più piccolo numero di dimenſioni), e ſi operi come nelle quantità finite.

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli eſponenti.

31. SI chiama *calcolo delle quantità intere per mezzo degli eſponenti* il calcolo delle quantità, che hanno la forma a^m, a^n, fatto per mezzo de' loro eſponenti. Le regole di queſto calcolo ſono ſoltanto per la multiplicazione e per la diviſione, e ſi deducono da n. 29. 30. Dal n. 29. ſi ha $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$; ma $a^5 = a^{3+2}$; dunque $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$ quindi $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Dal n.30. $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$; ma $a^2 = a^{5-3}$; dunque $a^5 : a^3 = a^{5-3}$; quindi $a^m : a^n = a^{m-n}$

Cioè la ſomma degli eſponenti m, n, è l'eſponente del prodotto di a^m a^n, e la differenza dell'eſponente n dall'eſponente m è l'eſponente del quoto di $\frac{a^m}{a^n}$

32. Quindi l'eſponente delle dimenſioni di a può eſſere poſitivo, negativo, o zero, ſecondo che in a^{m-n} ſarà n minore, maggiore, o eguale ad m. Quindi ancora 1.° $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; 2.° $a^0 = 1$; dacchè multiplicando a^{-m} ed $\frac{1}{a^m}$ per la ſteſſa quantità a^{2m}, ſi ha $a^{-m} \times a^{2m} = a^m$; $\frac{1}{a^m} \times a^{2m} = a^m$: Ed $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$; cioè multiplicando una quantità per a^0, non ſi muta il valore che aveva prima, ciocchè è proprio dell'unità. Queſte due ultime propoſizioni, ſi provano ancora altrimenti così: $\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$; ma $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2}$; dunque $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; in-

noltre

noltre $\frac{a^5}{a^5} = 1$; ma $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$; dunque $a^0 = 1$.

Nota. La potenza a^{-n} ſta al numeratore della frazione $\frac{a^{-n}}{1}$ che è eguale alla frazione $\frac{1}{a^n}$ in cui a^n ſtà al denominatore; or queſta oppoſizione di ſito, che paſſa trallo ſtare al numeratore, e lo ſtare al denominatore d'una frazione, viene acconciamente diſegnata dal ſegno dell'eſponente, che in un caſo è $+$, e nell' altro $-$. Vedi Fontenelle (*Geom. de l'infini n.* 480.)

Calcolo nelle frazioni.

33. RAppreſentando due qualunque frazioni con $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ſi avranno le ſeguenti formole.

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Diviſione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

34. Eſitano alcuni ſulla regola per la diviſione; ecco come ſi dimoſtra. Suppongo che multiplicando i termini d'una frazione per una ſteſſa quantità, non ſi muta il valore della frazione; così $\frac{1}{2}$ è eguale a $\frac{2}{4}$, cioè a $\frac{1 \times 2}{2 \times 2}$; Suppongo innoltre che la vera eſpreſſione del quoto di due quantità ſia una frazione che ha il dividendo per numeratore, ed il diviſore per denominatore; Or dico, che per dividere una frazione per un' altra, ſi devono roveſciare i termini del diviſore, e multiplicare il dividendo, per il diviſore così ridotto; cioè che

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Imperciocchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, e multiplicando i termini di quest' ultima frazione per il prodotto de' denominatori delle date, cioè per bd, si ha $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{abd}{b}}{\frac{bcd}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti.

35. S'E' già notato (num. 32.) che il segno —, messo avanti l'esponente d'una quantità qualunque dinota opposizione di sito, cioè che la data quantità fatta d'esponente positivo appartiene a quel termine della frazione, che è opposto al termine, in cui trovasi essa collocata; giusta la natura del segno —, che indica sempre qualche opposizione, o contrarietà, a differenza del +, che nell'uso dinota talvolta una semplice posizione d'una quantità; quindi $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \times a^n$$

36. Quindi si ha un metodo per calcolare la quantità intere a modo di frazioni, e le frazioni a modo delle quantità intere; ma per fermarci solamente nelle frazioni, si ha:

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = ab^{-1} - cd^{-1}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1}$

Di-

Divisione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$

37. Quindi si ha un' elegante dimostrazione delle ordinarie regole per la multiplicazione e divisione nelle frazioni.

1.° $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; dacchè $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1} = acb^{-1} d^{-1} = \frac{ac}{bd}$. 2.° $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; dacchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}$.

Estrazione delle radici dalle quantità Algebraiche.

38. Dato il prodotto d'una quantità sconosciuta qualunque, e continuatamente multiplicata per se stessa un dato numero di volte; trovare la quantità multiplicata. Il dato prodotto si chiama *potenza* della quantità che si cerca; la quantità che si cerca si chiama *radice* della potenza il dato numero di volte per cui s'è fatta la multiplicazione, si chiama *esponente* del grado della potenza, e della radice. Rappresentando per a qualunque quantità complessa, o incomplessa, intera, o rotta, sarà $a \times a$ la seconda potenza di a, ed a la radice seconda di $a \times a$; $a \times a \times a$ sarà la terza potenza di a, ed a la radice terza di $a \times a \times a$ . . . ec.

39. La soluzione del presente problema di trovare, od estrarre la radice da una data potenza, non ha difficoltà alcuna per le quantità incomplesse; è evidente 1.° Che la potenza d'una quantità incomplessa è il prodotto delle potenze de' suoi fattori; la seconda potenza di bc, è $bc \times bc = b^2 c^2$, e ciò torna allo stesso che moltiplicare per l'esponente della potenza cercata l'esponente di ciascun fattore della quantità data; per converso adunque ad estrarre la radice d'esponente dato da una potenza in-

com-

compleſſa, ſi dovrà dividere l'eſponente di ciaſcun fattore per l'eſponente della radice cercata; così la radice ſeconda di $b^2 c^2$ è $b^{\frac{2}{2}} c^{\frac{2}{2}} = bc$.

E' evidente in 2.º luogo che le potenze d'eſponente pari d'una quantità negativa, e le potenze di eſponente pari o impari d'una quantità poſitiva ſono ſempre poſitive; e che le potenze d'eſponente impari d'una quantità negativa ſono ſempre negative; quindi per converſo le radici d'eſponente impari d'una potenza negativa ſono negative; le radici d'eſponente impari d'una potenza poſitiva ſono poſitive; le radici d'eſponente pari d'una potenza poſitiva ſono e poſitive e negative; e le radici d'eſponente pari d'una potenza negativa non ſono nè poſitive, nè negative, cioè ſono immaginarie, ovvero impoſſibili.

Finalmente 3.º quanto a' coeficienti; ſe i coeficienti delle date potenze incompleſſe di grado n non ſono compoſti più di un numero n di figure, cercando tralle potenze delle ſemplici figure aritmetiche il coeficiente della data quantità, ſi troverà ſenza pena la ſua radice; ſerve a ciò la Tavola prima delle potenze de' numeri ſemplici. Se i coeficienti delle date potenze incompleſſe ſono compoſti di più figure che non ſono unità in n, ſi dovrà cercare la loro radice coi metodi delle potenze compleſſe.

Cercando la radice ſeconda di $36\, b^4 c^4$, ſi avrà 1.º $b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{4}{2}} = b^2 c^2$; 2.º La radice ſeconda di 36 è 6; il ſegno è $\pm$; cioè diſegnando col ſegno $\sqrt{\ }$ la radice ſeconda cercata; ſi avrà $\sqrt{36\, b^4 c^4} = \pm 6\, b^2 c^2$.

40. L'eſtrazione delle radici nelle quantità compleſſe ſi deduce dalla formazione delle potenze nelle quantità medeſime; baſtano però a ſervire di formole le potenze d'un binomio qualunque rappreſentato per $a + b$. Si multiplichi $a + b$ per ſe ſteſſo, e ſi avrà la ſeconda potenza di $a + b$; ſi multiplichi la ſeconda po-

e de' numeri semplici.

Quadrato-cubo, o cubo-quadrato, sesta potenza.	Secondo sursolido, o settima potenza.	Biquadrato quadrato, o ottava potenza.	Cubo-cubo, o nona potenza, ec.
espon. (6)	espon. (7)	espon. (8)	espon. (9)
1	1	1	1
64	128	256	512
729	2187	6561	19683
4096	16384	65536	262144
15625	78125	390625	1953125
46656	279936	1679616	10077696
117649	823543	5764801	40353607
262144	2097152	16777216	134217728
531441	4782969	43046721	387420489

potenza di $a+b$ per la sua radice, e si avrà la terza potenza di $a+b$... come nella tavola seconda. Per vedere l'uso di queste formole per l'estrazione delle radici, sia meglio applicarle ad un esempio.

Si cerchi la radice seconda di $x^2+2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ ordinata per x. La seconda potenza di $a+b$ è $a^2+2ab+b^2$; discorro così: 1.° Per avere la prima parte della radice di questa formola, che altronde so essere a, basta estrarre la radice seconda dal primo termine a^2 della formola medesima, ordinata per a; essendo $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$; dunque per avere la prima parte della radice cercata, che è rappresentabile per a, basterà estrarre la radice seconda dal primo termine x^2, e si avrà x. 2.° Per avere la seconda parte radicale b della formola, basta sottrarre dalla medesima il quadrato della prima parte a, e dividere il primo termine $2ab$ del ressiduo $2ab+b^2$, per il coeficiente di b, cioè per $2a$; dunque per avere la seconda parte radicale cercata, che è rappresentabile per b, si dovrà sottrarre dalla data quantità il quadrato x^2 della prima parte x già trovata, e dividere il primo termine $2bx$ del ressiduo $2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ per $2a$, cioè per $2x$; si avrà b. 3.° Sottraendo dal ressiduo della formola il prodotto di b, multiplicato per la somma del divisore, e della seconda parte radicale b, cioè sottraendo $(2a+b)b$, si ha zero per residuo; dunque se la radice della data potenza è binomia, sottraendo dal residuo predetto la quantità rappresentata per $(2a+b)b$, cioè $(2x+b)b$, si dovrà avere zero per residuo; ed avendo invece il residuo $2xi+2bi+i^2$, si ha un segno sicuro, che la radice cercata non è binomia, e che colle precedenti operazioni non si è avuta che una parte della radice cercata. 4.° E' però certo che questo residuo è minore della quantità data di tutto intero il quadrato di $x+b$; si può adunque contare d'avere solamente fin qui sminuita la data quantità del quadrato d'una sola parte della radice che si cerca; dunque chia-

mando *parte prima* la parte trovata $x+b$, ſi potrà eſſa diſegnare per l'a della formola, e per trovare l'altra parte b, ſi dovrà ricominciare dalla ſeconda operazione, cioè dal dividere il reſiduo $2ix+2bi+i^2$ per $2a$, oſſia per $2x+2b$, e l'i, che ſi ha dalla diviſione, ſarà una nuova parte radicale. Sottraendo, come prima, dal reſiduo medeſimo la quantità $(2a+b)b$, cioè $(2x+2b+i)i$, ſi ha zero per reſiduo, come nella formola; ciò è ſegno manifeſto, che la radice cercata è $x+b+i$.

41. Se non ſi foſſe avuto zero per reſiduo, ſi ſarebbe ripetuta l'ultima delle precedenti quattro operazioni, fino a che, o ſi aveſſe zero per reſiduo, o l'ultimo reſiduo non foſſe più diviſibile per $2a$: Nel primo caſo la quantità data ſarebbe potenza *perfetta*, e la radice trovata ſarebbe radice *finita*, o *razionale*; nel ſecondo la quantità data ſarebbe potenza *imperfetta*, e la radice trovata ſarebbe radice della maſſima potenza naſcoſta nella quantità data. Lo ſteſſo è il metodo per l'eſtrazione delle radici più alte di grado n, ed è manifeſto il modo d'applicare le formole alle intere quantità numeriche. Si ſepari, come è noto, il dato numero da deſtra a ſiniſtra in claſſi di figure n per ciaſcuna; ſi operi ſu quelle venendo da ſiniſtra verſo la deſtra, come ſu altrettanti termini d'una quantità compleſſa.

42. Per l'eſtrazione delle radici dalle frazioni, ſi rifletta, che il metodo univerſale per elevare ad una potenza qualunque una quantità data, applicato alle frazioni, ſi riduce ad alzare il numeratore, ed il denominatore della data frazione, alla potenza di grado dato; ciò fa conoſcere, che ad eſtrarre una radice di grado dato da una frazione, baſta l'eſtrarre la radice cercata da ciaſcuno de' termini della data frazione. Così $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Cal-

Calcolo delle quantità radicali.

43. DAlle cose dette al n. 39. sui segni da premettersi alle radici incomplesse è manifesto, che si possono distinguere due generi di quantità radicali, cioè le quantità radicali *reali*, e le quantità radicali *immaginarie*; $\sqrt{4}$ è una quantità radicale reale; $\sqrt{-4}$ è immaginaria. Col metodo del n. 40. si può assegnare il valor vero di molte quantità radicali reali, come $\sqrt{4} = 2$; ma d'un infinità d'altre quantità radicali reali, non si può conoscere, che la radice della potenza massima, che vi sta dentro come nascosta, e chiusa; non si sa la radice seconda di 5, ma la radice della massima potenza seconda, che sta in 5 e 2; le quantità radicali reali delle quali si assegna il valor vero si chiamano *commensurabili*; le altre quantità radicali reali si chiamano *incommensurabili* o *sorde*. Grande è il profitto che se ne trae nell'analisi da queste quantità radicali, o reali, o immaginarie, sottomesse opportunamente alle leggi del calcolo; si disegnan' esse col segno $\sqrt{\ }$, scrivendo alla sinistra del medesimo, l'esponente della radice; $\sqrt[2]{a}$, o semplicemente $\sqrt{a}$, significa la radice seconda di a; $\sqrt[3]{a}$ significa la radice terza di a; $\sqrt[m]{a}$ significa la radice di grado m di a.

44. Racchiudo nelle seguenti formole tutte le regole del calcolo, pe' radicali reali.

Addizione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} + \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps+qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Sottrazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} - \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps-qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Multiplicazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs}\sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$

Divisione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} : \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} \quad = \quad \frac{ps}{qr}\sqrt[m]{\frac{ad}{bc}}$

Formaz.e delle potenze. $\left(\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{s}{v}} \quad = \quad \sqrt[\frac{mv}{s}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

Estrazione delle radici. $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} \quad = \quad \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

45. Per la dimostrazione di queste formole, conviene supporre, che, in vece di $\sqrt[m]{a}$ si può scrivere $a^{\frac{1}{m}}$; ciò discende naturalmente dal n. 39. Chi cerca la radice m di a, considera a come una perfetta potenza m d'una incognita quantità; quindi per le regole dimostrate al n. 39. si dovrà dividere l'esponente di a per l'esponente della radice cercata, e si avrà $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Da questo principio si hanno le dimostrazioni delle formole precedenti; l'applico ad una sola. Si cerca la radice di grado $\frac{s}{v}$ della quantità $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; si avrà $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}}$

$$= \frac{p^{\frac{v}{s}}\, a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{v}{s}}\, b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{\frac{mv}{ms}}\, a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{mv}{ms}}\, b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{m:\frac{ms}{v}}\, a^{1:\frac{ms}{v}}}{q^{m:\frac{ms}{v}}\, b^{1:\frac{ms}{v}}} = \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$$

46. Per le quantità radicali complesse, miste, o non miste di quantità commensurabili, o razionali come $a\ b\ldots$ si osservino le stessissime leggi, che si sono date per le quantità intere; per non imbarazzarsi nel decorso del calcolo di tanti segni radicali, l'uno sull'altro ammucchiati, e stretti insieme, si sostituiscano nelle quan-

quantità date de' simboli interi, a, b...ec., e nel prodotto si rimetta il loro primo valore.

47. Anche le quantità immaginarie incomplesse, e complesse, miste, o no, di quantità reali soggiacciono alle stesse regole del calcolo delle reali quantità. Si osservi però che le quantità che stanno sotto il segno si possono sempre considerare come quantità positive, ma multiplicate per -1; così $\sqrt{-a}=\sqrt{-1.a}$, e dalle formole del n. 44. $\sqrt{-1.a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$. Prima dunque di fare le consuete operazioni del calcolo, o almeno quelle, che dipendono dalla multiplicazione, e dalla divisione, si separino, come nell'esempio addotto, le quantità immaginarie, e si mantengano più che si può le $\sqrt{-1}$ anche ne' risultati, finchè non vengano cancellate, o tolte da un altra $\sqrt{-1}$ introdotta nel calcolo da qualche multiplicazione, e divisione.

Multiplicazione. $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{-1.a}\times\sqrt{-1.b}$
$=\sqrt{a}\,\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\,\sqrt{-1}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}\times\sqrt{-1}^{2}$
$=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$

Divisione. $\sqrt{-a}:\sqrt{-b}=\sqrt{-1.a}:\sqrt{-1.b}=\sqrt{a}\,\sqrt{-1}:\sqrt{b}\,\sqrt{-1}=$
$\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Per gli esponenti. $\sqrt[n]{-a^m}=\sqrt[n]{-1.a^m}=\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{-1}$
$=\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt{-1}=a^{\frac{m}{n}}\,\sqrt{-1}$; si noti 1.° che n indica un numero pari; 2.° che a ragione si suppone $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}=-1$; dacchè nell'espressione di $\sqrt{-1}$ si consideri -1 come quadrato.

48. Si è sempre supposto nelle precedenti formole che le quantità radicali date per la somma, e sottrazione, abbiano quantità simili sotto i segni, e che gli esponenti de' segni radicali fossero in tutte le operazioni sempre gli stessi in ciascuna delle date quantità. Quando le quantità, che stano sotto i segni non fossero simili, non si potrebbe fare altro che in-

indicare col $+-$ la somma, o la sottrazione cercata; ma quando gli esponenti delle date quantità radicali fossero diversi, v'hanno acconcie regole per ridurgli allo stesso esponente; queste appartengono alle riduzioni de' radicali, che noi per ultimo mettiam qui per ristretto, anche ad esercizio di calcolo.

Riduzioni nelle quantità radicali.

49. **R**Idurre una quantità radicale alla sua più semplice forma.

Formola. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

Si cerchino tutti i divisori della quantità, che sta sotto il segno; si estragga la radice m da quegli che sono potenze perfette di m; si metta fuori del segno, a modo di coeficiente, il prodotto di queste radici, ed il prodotto degli altri divisori si lasci solo sotto il segno.

Dim. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b} \times \frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

50. Ridurre una quantità qualunque sotto qualunque segno radicale.

Formola. $\frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

Si alzi la quantità data alla potenza d'esponente eguale all'esponente del segno dato; si metta questa potenza sotto il dato esponente.

Dim. $\frac{a}{b} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

51. Ridurre una quantità qualunque ad un prodotto d'un numero qualunque m di quantità radicali. For-

Formola. $\frac{a}{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\sqrt[m]{}$ ... ec. m in numero.

Si scriva la quantità data sotto il segno $\sqrt[m]{}$; si congiunga insieme co' noti segni di multiplicazione un numero m di queste quantità radicali.

Dim. Se $m = 4$; Sarà

$$\frac{a}{b}=\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^4=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

52. Mettere fuori del segno qualunque quantità algebraica x di qualunque termine, per esempio del primo, d'una data quantità radicale complessa.

Formola. $g\,x\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}=g\,x^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+b\,x^{n-1}}$.

Si cerchi la radice m della quantità x; per questa radice si divida la quantità complessa, che sta sotto il segno, e si multiplichi il coeficiente del segno radicale.

Dim. $\sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}$; dunque $g\,x\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}=g\,x\,.\,x^{\frac{1}{m}}\dfrac{\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}}{\sqrt[m]{x}}$

$=g\,x^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+b\,x^{n-1}}$.

53. Mettere al numeratore d'una quantità, che sta fuori del segno, qualunque quantità data.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{d\,g^m}}$.

Si multiplichi per la data quantità il coeficiente del dato radicale; si alzi la medesima quantità data alla potenza d'esponente eguale all' esponente del radicale dato, e per questa potenza si divida la quantità, che sta sotto il segno.

Dim.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot g \cdot \frac{\sqrt[m]{\frac{c}{d}}}{\sqrt[m]{g^m}} = \frac{a\,g}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d\,g^m}}.$$

54. Mettere al denominatore della quantità, che ſta fuori del ſegno, qualunque quantità data.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{c\,g^m}{d}}.$$

Si divida il coeficiente del dato radicale per la quantità data; ſi alzi la medeſima quantità data alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del radicale dato, e per queſta potenza ſi moltiplichi la quantità, che ſta ſotto il ſegno del dato radicale.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\sqrt[m]{g^m}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{c\,g^m}{d}}.$$

55. Ridurre una data quantità radicale ad un ſegno d'eſponente n maggiore, o minore dell' eſponente dato m.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}.$$

Si divida l'eſponente del ſegno cercato per l'eſponente del ſegno dato; ſi alzi la quantità, che ſta ſotto il dato ſegno alla potenza d'eſponente eguale al quoto di queſta diviſione. Si metta queſta potenza ſotto il ſegno cercato preceduto dal coeficiente del ſegno dato.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{n}{mn}}}{d^{\frac{n}{mn}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}.$$

56. Ri-

56. Ridurre ad una quantità intera la quantità rotta, che per avventura ſi trovi ſotto il ſegno d'una data quantità radicale.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}$.

Si divida il coeficiente del dato radicale per il denominatore della frazione, che ſta ſotto il ſegno; ſi alzi il denominatore medeſimo alla potenza d'eſponente eguale all'eſponente del dato ſegno; per queſta potenza ſi multiplichi la frazione, che ſta ſotto il ſegno.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}\,d^{\frac{m}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{\frac{cd^{m}}{d}}$$

$$= \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}.$$

57. Ridurre qualunque numero di quantità radicali al medeſimo ſegno.

$$A.$$

$$\text{Formola. } \begin{array}{l} \frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \\ \frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^{n}}{b^{n}}}. \\ = \frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^{m}}{d^{m}}}. \end{array} \right.$$

Si multiplichi l'eſponente di ciaſcun ſegno radicale A per il prodotto degli eſponenti degli altri ſegni; e ſi alzi la quantità, che ſta ſotto il ſegno A, alla potenza d'eſponente eguale a queſto ſteſſo prodotto.

$$\text{Dim. } \frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{n}{mn}}}{b^{\frac{n}{mn}}} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^{n}}{b^{n}}},$$ e per la

 ſteſſa

ſteſſa ragione $\frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}=\frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^m}{d^m}}$.

58. Per la traſformazione del num. 49. è neceſſario ſapere trovare tutti i diviſori d'una data quantità. Egli è facile il trovare i diviſori incompleſſi, ſemplici, e compoſti d'una data quantità: Si divida la data quantità per la più piccola, o più ſemplice quantità, della quale ſi veda compoſto la data quantità X; Si divida il quoto X' per la medeſima quantità.... fino a che qualcuno de' quoti X'' non poſſa più dividerſi per l'aſſunto diviſore. Si divida X'' per la più ſemplice delle quantità componenti, e ſi ripeta la medeſima operazione ſu i nuovi quoti X''', fino a trovarne uno non diviſibile eſattamente, che per ſe ſteſſo. Si ſcrivano per ordine uno ſotto l'altro i quoti X', X'', X'''..... in una colonna A; in una ſeconda colonna B, vicina alla prima, ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a due a due; in una terza colonna C ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a tre a tre......, B conterrà i diviſori ſemplici; C, D.... conterrà i diviſori compoſti. Talvolta con queſto metodo ſi troveranno anche i diviſori compleſſi; Ma il trovargli tutti eſattamente, e per ordine, non è opera di leggiere fatica, e di piccole rifleſſioni; queſto problema lo riſervo ad un trattato particolare.

CAPO

CAPO TERZO.

Uso del Calcolo Algebraico nella soluzione delle equazioni.

Formazione delle equazioni.

59. SI chiama *Algebra*, o *Analisi* l'arte di sciogliere col calcolo algebraico, i problemi; che si propongono intorno a qualsivoglia specie di quantità; e la prima operazione dell' Analista industre, è di denominare colle lettere dell' Alfabeto le quantità date, e le cercate, e di esprimere con carattere algebraico le relazioni, che tra queste passano, non altrimenti che i concetti della mente nostra siamo usi ad esprimere con parole, proprie a quell' idioma, che a noi è comune, e familiare. Ciascuna condizione del problema dà un' equazione, e se tante sono le condizioni, ossia se tante in numero sono le equazioni, quante sono le quantità cercate, il problema si chiama *determinato*; se sono meno, o più in numero l'equazioni che le quantità cercate, il problema si chiama *indeterminato o più che determinato*; per ciascuno di questi casi, ci sono opportune regole, o per determinare esattamente il valore delle quantità incognite contenute nelle equazioni, o per determinarlo prossimamente al vero. Non è mia intenzione di stendere partitamente tutti i precetti dell' arte Analitica; Solamente esporrò alcuni metodi più facili per trovare il valore dell' incognita, per cui sia ordinata una data equazione, supponendo conosciute tutte le altre quantità, che ne compongono i termini.

60. E in prima conviene sapere quale sia l'indole, e la natura delle radici d'una data equazione; volgiamoci per ciò al problema inverso di cercare quale sia la natura d' un' equazione, che ha per radici (o per valore dell' incognita) diverse date quantità. Sia x l'incognita, e siano a, b, c, d.... i di-

versi valori di x; cosicchè sia $x = a$, $x = b$, $x = c$, ... ec. 1.° Si avrà $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$ ... ec.; questa è la fondamentale operazione dell' Analisi, chiamata *trasposizione*. Si conserva l'equazione tra i due membri (ciascuna delle quantità tra se eguali si chiama membro dell'equazione) d'una data equazione, se si tolga da un membro dell'equazione qualunque termine, e si metta nell' altro membro col segno contrario, scrivendo un zero al luogo del primo; ciò non è altro, che aggiungere, o sottrarre da amendue i membri d'un'equazione una stessa quantità; se $x = a$, sottraendo da amendue i membri la quantità a, si ha $x - a = a - a$, cioè $x - a = o$. 2.° Ciascuna di quelle equazioni $x - a = o$, $x - b = o$, ... si chiama equazione di primo grado; dacchè l'x non si trova in grado più elevato del primo; il prodotto di due di quelle equazioni $(x - a = o)$ $(x - b = o)$ si chiama equazione di secondo grado, dacchè, fatta la multiplicazione, l'x si trova alzata al secondo grado, cioè alla seconda potenza; ed in generale, il grado dell'equazione è sempre eguale all'esponente massimo dell'incognita. Si noti che aggiungere un'equazione ad un'altra, sottrarre un'equazione da un'altra, multiplicare, dividere un' equazione per un' altra .... significa aggiungere ciascun membro d'un'equazione al membro corrispondente dell' altra ... ec. 3.° Quindi ciascuna equazione si può concepire come composta di tante equazioni di primo grado, quante sono le unità nell' esponente del suo grado. Le equazioni però di grado più elevato si possono concepire formate dalla multiplicazione d'altre equazioni di grado inferiore, e più elevato del primo; quelle di quarto grado possono essere formate da due del secondo, quelle del sesto da tre del secondo, o da due del terzo ... ec. 4.° Data una delle componenti, si può abbassare di grado la composta, dividendo questa per la sua componente, e se il grado della composta è m, ed il grado della componente è n, il grado della ridotta sarà $m - n$.

61. Fat-

61. Fatte le multiplicazioni accennate delle equazioni di primo grado, si ha grado

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{I.} \;\ldots\ldots & x & - a = 0 & & & & \\
\text{II.} \;\ldots\ldots & x^2 & - ax & + ab = 0 & & & \\
 & & - bx & & & & \\
\text{III.} \;\ldots\ldots & x^3 & - ax^2 & + abx & - abc = 0 & & \\
 & & - bx^2 & + acx & & & \\
 & & - cx^2 & + bcx & & & \\
\text{IV.} \;\ldots\ldots & x^4 & - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 & \\
 & & - bx^3 & + acx^2 & - abdx & & \\
 & & - cx^3 & + bcx^2 & - acdx & & \\
 & & - dx^3 & + adx^2 & - bcdx & & \\
 & & & + bdx^2 & & & \\
 & & & + cdx^2 & & & \\
\text{V.} \;\ldots\ldots & \text{ec.} & & & & &
\end{array}
$$

Numero, e qualità delle radici reali.

62. DAll' attenta considerazione di queste, e d'altre simili formole fatte colle radici negative, o miste, si vede manifestamente. 1.° Che qualunque equazione ha tante radici nè più nè meno, quante sono le unità dell' esponente del suo grado. 2.° Che il coeficiente del secondo termine, o a dire meglio, della incognita che lo distingue, contiene la somma di tutte le radici; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici prese a due a due; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici a tre a tre......, e l'ultimo termine contiene il prodotto di tutte le radici prese insieme. 3.° Ne' termini pari, le radici stanno multiplicate in numero impari; ne' termini impari, stanno multiplicate in numero pari. 4.° Se tutte le radici sono negative, i termini dell' equazione sono tutti positivi; se tutte le radici sono positive, i ter-

termini dell' equazione sono alternativamente positivi, e negativi; se sono miste di radici positive, e negative, non è mai continuata l'alternazione de' segni, e talvolta manca qualche termine; di più tante sono le radici positive, quante sono le alternazioni de' segni + —; e tante sono le radici negative, quante sono le *consecuzioni* dello stesso segno ne' termini dell' equazione. 5.° Se la somma delle radici positive è eguale alla somma delle negative, manca il secondo termine dell' equazione, o si fa eguale a zero; se la somma delle radici positive supera la somma delle negative, il secondo termine dell' equazione è negativo; se la somma delle positive è minore delle negative, il secondo termine è positivo. 6.° Se il numero delle radici positive è pari, l'ultimo termine dell' equazione è positivo, se impari è negativo. 7.° Se si cambino i segni de' termini solamente pari, o solamente impari d'un' equazione tutte le radici si cambiano di positive in negative, e di negative in positive. 8.° Se invece d'x, e delle sue potenze si sostituisca in un' equazione il valore dell' incognita, la somma de' termini dell' equazione sarà eguale a zero. Queste proprietà delle radici si possono quasi tutte dimostrare *a priori* dalle regole de' segni + —; basti per noi l'induzione. Si noti, che le proposizioni inverse delle otto precedenti sono vere in ogni caso.

Numero, e qualità delle radici imaginarie.

63. DAl calcolo delle quantità imaginarie è manifesto, che il loro prodotto, solamente allora è reale, quando sono pari in numero le imaginarie quantità insieme multiplicate; si vede di più che per togliere da un polinomio $x - a - \sqrt{-b}$ il segno radicale, non v'è altro mezzo, che multiplicare il dato polinomio per un altro, che non differisca dal primo, che nel segno prefisso al termine imaginario, cioè per $x - a + \sqrt{-b}$.

64. For-

64. Formando su questi due principj l'equazioni composte da altre equazioni imaginarie di primo grado si vedrà: 1.° Che se v'hanno radici imaginarie in un'equazione, esse sono sempre pari in numero. 2.° Che sotto il segno radicale di ciascun binario di radici imaginarie vi sta sempre la medesima quantità, soltanto diversa nel +, o − che precede il segno $\sqrt{\ }$. 3.° Che qualunque equazione di grado impari, ha almeno una radice reale. 4.° Che nelle equazioni di grado pari, v'ha sempre una radice reale, quando l'ultimo termine, cioè il termine costante è negativo. 5.° Nelle equazioni di terzo e quarto grado, se manca il secondo termine, ed il terzo sia positivo, v'hanno sempre delle radici imaginarie.

65. Il problema più difficile intorno alle radici imaginarie delle equazioni, è di sapere il loro numero prima d'applicarvi i metodi per scioglierle. Newton ha esposto per ciò un metodo assai elegante nella sua Aritmetica universale; lo ha dimostrato il Sig. Giorgio Campbell, e nel dimostrarlo ci ha fatti avveduti che era difettoso in molti casi.

Espongo qui il metodo, che a quello del Newton v'ha sostituito del suo il citato Autore. Sia m il grado dell' equazione; dalla tavola delle potenze di $a+b$ si prendano i coeficienti A della potenza m, ommessi gli estremi; si sminuisca ciascun coeficiente di un unità, si avrà A'; si divida ciascun termine di A' per il doppio termine corrispondente di A; e le frazioni B, o B' quindi nate, si scrivano per ordine sopra i termini della data equazione, ommessi gli estremi. Sia n qualunque termine della data equazione; n' la frazione sovrapposta; a, b, c... ec. i termini, che vengono verso la destra del termine n; a', b', c', d' ... i termini che gli vengono verso la sinistra. Ciò posto: Se $n'n^2$ sarà maggiore di $a'a - b'b + c'c - d'd + e'e - f'f$.... ec. $= C$, si scriva il segno + sotto n; se $n'n^2$ sarà minore di C, si scriva il segno − sotto n; e sotto il primo e l'ultimo termine dell' equazione

zione ſi metta il ſegno $+$: Saranno tante le radici imaginarie nella data equazione, quante ſi troveranno alternaztoni di $+$ in $-$ ne' ſegni ſottopoſti. Fin qui l'Autore; io non ho fatto altro che mettere il teorema ſotto forma più comoda, e più piana, introducendo le denominazioni di n, n'.... Applico il metodo ad un eſempio. Sia l'equazione $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$ di grado ſettimo. Siano A i coeficienti della ſettima potenza di $a + b$, ommeſſi gli eſtremi; ſottraendo l'unità da ciaſcun termine di A, ſi avrà A'; dividendo ciaſcun termine di A' per il doppio de' termini corriſpondenti di A, ſi avrà B, cioè B'

$$A \ldots.\ 7.\ 21.\ 35.\ 35.\ 21.\ 7.\quad B \ldots.\ \frac{6}{14}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{34}{70}.\ \frac{34}{70}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{6}{14};$$

$$A' \ldots.\ 6.\ 20.\ 34.\ 34.\ 20.\ 6.\quad B' \ldots.\ \frac{3}{7}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{3}{7};$$

Si diſpongono queſte frazioni ſopra i termini della data equazione, ommeſſi gli eſtremi, ſi avrà

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24=0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

per il termine $5x^6$ ſi ha $n'n^2 = \frac{75}{7}x^{12}$, e $C = 15x^{12}$

per il termine $15x^5$ ſi ha $n'n^2 = \frac{750}{7}x^{10}$, e $C = 97x^{10}$

per il termine $23x^4$ ſi ha $n'n^2 = \frac{8993}{35}x^8$, e $C = 292x^8$

per il termine $18x^3$ ſi ha $n'n^2 = \frac{5508}{35}x^6$, e $C = 70x^6$

per il termine $10x^2$ ſi ha $n'n^2 = \frac{1000}{21}x^4$, e $C = 48x^4$

per il termine $28x$ ſi ha $n'n^2 = \frac{336}{1}x^2$, e $C = 24x^2$

e mettendo ſotto ciaſcun termine dell' equazione i ſegni opportuni, ſi hanno ſei mutazioni, o variazioni de' Segni, cioè l'equa-

zione data contiene sei radici imaginarie. Colla regola del Newton non se ne troverebbero che due.

Trasformazioni delle equazioni.

66. L'Artificio più universale, e più spedito per trovare le radici d'una data equazione è di trasformare l'equazione data in un'altra più semplice, per passare quindi dalle radici della trasformata alle radici della proposta. L'uso del calcolo, e la pronta penetrazione dell'Analista suggerisce nelle particolari circostanze la più acconcia legge, con cui si deve trasformare la proposta equazione; qualunque però sia la legge della trasformazione. 1.° Si prenda ad arbitrio un'incognita y diversa dall'incognita x, per cui è ordinata l'equazione proposta; quest' y rappresenterà qualunque radice della trasformata. 2.° Si esprima con un'equazione tra x ed y la legge della cercata trasformazione. 3.° Si ricavi da questa equazione *ausiliare* il valore di x, da sostituirsi nella data equazione. Comunemente parlando, non fa bisogno per trovare l'x dell'equazione ausiliare, che delle più volgari operazioni del calcolo, e de' semplicissimi teoremi, che da quelle si deducono; a cagione d'esempio, che un quoto multiplicato pel divisore è eguale al dividendo; che un prodotto diviso per uno de' suoi fattori è eguale al prodotto degli altri fattori.... ec.

67. Esempj di trasformazioni. 1.° Aumentare le radici x della proposta, d'una data quantità m; si ha $x+m=y$, cioè $x=y-m$ da sostituirsi nella proposta. 2.° Sminuire le radici x d'una data quantità m; sarà $x-m=y$, cioè $x=y+m$. 3.° Sottrarre ciascuna radice x dalla quantità m; sarà $m-x=y$, cioè $x=m-y$. 4.° Multiplicare le radici x colla quantità m; sarà $mx=y$, cioè $x=\frac{y}{m}$. 5.° Dividere le radici x per la quantità m;

 sarà

farà $\frac{x}{m} = y$, cioè $x = my$. 6.° Dividere una quantità m per ciascuna radice x; farà $\frac{m}{x} = y$, cioè $x = \frac{m}{y}$.

Se le radici della trasformata vogliansi eguali

$$\text{a } \sqrt[m]{x}\text{, farà } x = y^m$$

$$\text{a } \sqrt[m]{fx}\text{; farà } x = \frac{y^m}{f}$$

$$\text{ad } \frac{f^m}{x}\text{, farà } x = \frac{f^m}{y}$$

$$\text{ad } \frac{xf^m}{g^n}\text{, farà } x = \frac{g^n y}{f^m}$$

.... ec.

E' evidente, che sostituendo le radici della trasformata in queste equazioni ausiliarie, si avranno le radici x della proposta; e facendo varj esempj di trasformazioni, si vedrà. 1.° Che per multiplicare le radici x con m, basta sostituire y invece d'x nella data equazione, e multiplicare il secondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 2.° Che per dividere le radici x per m, basta sostituire y invece d'x nella proposta, e dividere il secondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 3.° Che, se l'equazione proposta ha alcune radici imaginarie, qualunque trasformata conterrà le imaginarie medesime. 4.° Se la proposta ha delle radici positive e negative, e si aumentino le radici d'una quantità m, le radici positive si aumenteranno, e si sminuiranno le negative nella trasformata. 5.° Se la proposta ha delle radici positive e negative, e la quantità m, di cui si aumentino le radici della proposta sia eguale ad una delle radici negative, questa farà eguale a zero nella trasformata; la trasformata innoltre avrà l'ultimo termine eguale

eguale a zero, e si potrà abbassare d'un grado, dividendola per y. 6.° Nella stessa supposizione, se m sarà maggiore di qualunque delle radici negative della proposta, le radici negative della proposta così accresciute, saranno le positive della trasformata, e la minima radice positiva della trasformata nascerà dalla massima negativa della proposta. 7.° Se la proposta ha delle radici positive, e negative, e la quantità m, di cui si vogliano scemate le radici della proposta, sia eguale ad una, o maggiore di ciascuna radice positiva della proposta, o mancherà l'ultimo termine nella trasformata, o le positive della proposta sminuite di m saranno le radici negative della trasformata. E' facile il vedere le proposizioni inverse delle precedenti, la loro dimostrazione dalle regole de' segni, e dal num. 62., ed i corollari, che si possono dedurre da ciascuna.

Uso delle trasformazioni.

68. TRovare il valore della quantità m, che aggiunta alle radici della proposta, faccia svanire un dato termine nella trasformata.

Se il secondo termine della proposta ha $+$ si aumenti, e se ha $-$ si sminuisca ciascuna radice della proposta, della quantità m supposta nota; si faccia eguale a zero il coeficiente del termine della trasformata, che corrisponde al termine, che si vuol togliere; il valore di m dedotto da questa equazione sarà la quantità cercata. Sia la proposta $A \ldots\ldots z^3 - 2sz^2 + vz - t^2 = 0$. Si supponga
$$\begin{array}{l} + s^2 z \end{array}$$
$z - m = y$, cioè $z = y + m$; Sarà $z = y + m$

$$z^2 = y^2 + 2my + m^2$$
$$z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$$

d'onde nella proposta sarà $z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$

$$
\begin{aligned}
-2sz^2 &= -2sy^2 - 4msy - 2sm^2 \\
+vz &= \qquad\quad + vy + mv \\
+s^2 z &= \qquad\quad + s^2 y + ms^2 \\
-t^2 &= \qquad\qquad\quad - t^2
\end{aligned}
$$

cioè invece di A si avrà $B \ldots\ldots$

$$
\begin{aligned}
y^3 + 3my^2 &+ 3m^2 y + m^3 = 0 \\
-2sy^2 &- 4msy - 2m^2 s \\
&+ vy + mv \\
&+ s^2 y + ms^2 \\
&\qquad - t^2
\end{aligned}
$$

Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il secondo termine, si supponga il coeficiente di y^2, in B, eguale a zero, cioè $3m - 2s = 0$, ed $m = \frac{2s}{3}$ sarà la quantità da sostituirsi in B per avere la cercata trasformata. Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il terzo termine, si supponga il coeficiente di y in B eguale a zero; e se si voglia togliere il quarto termine, si supponga il coeficiente di y^0, cioè l'ultimo termine di B, eguale a zero. Si vede in generale, che per fare svanire nella trasformata il termine che corrisponde all'n esimo della proposta, conviene sciogliere un' equazione di grado $(n-1)$ esimo.

69. Trovare una quantità m, che aggiunta alle radici della proposta, faccia eguale ad a il coeficiente d'un dato termine n esimo della trasformata.

Si operi come nel problema precedente; ma il coeficiente del termine n esimo in B si dovrà supporre eguale ad a, e non a zero.

70. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta.

Si aumentino, o si sminuiscano, come al num. 68. d'una qualunque quantità a le radici della proposta.

71. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta, ed elevare la trasformata ad un grado qualunque più elevato del grado della proposta.

Si multiplichi la proposta per x tante volte, finchè la trasformata sia di grado cercato; si operi sull'equazione così ridotta come al num. 70.

72. Se il primo termine della propoſta ha un coeficiente a diverſo dall' unità, trasformarla in un' altra, il cui primo termine abbia l'unità per coeficiente.
Si multiplichino le radici della propoſta per a; oppure ſi divida ciaſcun termine della propoſta per a.

73. Se il primo termine della propoſta ha per coeficiente l'unità, ed i coeficienti d'uno, o più altri termini ſieno frazionari, trasformarla in un'altra, che non abbia frazioni per coeficienti degli altri termini, e mantenga l'unità per coeficiente del primo termine.
Si multiplichino le radici della propoſta per il prodotto de' denominatori di tutti i termini.

74. Trasformare la propoſta in un' altra, in modo, che la radice maſſima della propoſta ſia la minima della trasformata, e la minima della propoſta ſia la maſſima della trasformata.
Si ſupponga $x = \frac{1}{y}$, e fatte come ſopra le ſoſtituzioni, ſi multiplichi ciaſcun termine della trasformata per il prodotto de' denominatori della medeſima.

75. Se le radici della propoſta ſiano parte poſitive, parte negative, trasformarla in un'altra, le di cui radici ſiano tutte poſitive.
Si muti il ſegno al maſſimo coeficiente negativo della propoſta; da queſto, aumentato d' un' unità, ſi ſottraggano le radici della propoſta. Sia $x^2 - 2x - 3 = 0$; il maſſimo coeficiente negativo è -3; mutando il ſegno a queſto coeficiente ſi ha 3; ſi faccia $3 + 1 - x = y$, cioè $4 - x = y$, oſſia $4 - y = x$; d'onde $x^2 = 16 - 8y + y^2$, e la propoſta ſi cambierà in
$y^2 - 8y + 16 = 0$, cioè in $y^2 - 6y + 5 = 0$, che per l'alternazione
$+ 2y - 8$
$- 3$
de' ſegni, ha tutte le ſue radici poſitive.

76. Togliere gli incommenſurabili coeficienti $\sqrt{n}$, che per avventura ſi trovino ne' termini pari della propoſta.
Si multiplichino le radici della propoſta per $\sqrt{n}$.

77. Se

77. Se si trovi nel coeficiente del secondo termine della proposta $\sqrt[3]{n^2}$, nel coeficiente del terzo termine $\sqrt[3]{n}$, nessun incommensurabile al quarto termine, $\sqrt[3]{n^2}$ al quinto, $\sqrt[3]{n}$ al sesto, nessuno al settimo, e così successivamente, basta supporre $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e svaniranno i radicali di terzo grado da qualunque data equazione. Se non vi fosse quell' ordine ne' radicali coeficienti d'un' equazione, è manifesto che colla presente trasformazione, che è la quarta del num. 67. non svanirebbero i radicali. Lo stesso metodo può servire in casi simili per le $\sqrt[4]{n}$, e per le $\sqrt[m]{n}$.

78. E' troppo importante il sapere togliere i coeficienti radicali da una proposta equazione per non dovere qui ommettere un metodo generale per le radicali d'ogni grado, comunque disposte ne' termini dell' equazione medesima. 1.° Si lasci sola in un membro dell' equazione la quantità radicale, che si vuol togliere dall'equazione; ciò si fa col trasporre nell' altro membro tutte le altre quantità: Si alzi ciascun membro dell' equazione alla potenza d'esponente eguale all' esponente del radicale medesimo. 2.° Se dopo questa operazione si trovi nel secondo membro qualch'altra quantità radicale, si operi su questa come sulla prima, e così nel resto. Si abbrevierà il calcolo (come al num. 46.) col sostituire prima di tutto, o dopo ciascuna operazione una nuova lettera invece delle quantità già divenute commensurabili, riservandosi a rimettere nell' equazione il valore, o i valori di queste lettere introdotte, dopo finite tutte le operazioni sulle quantità radicali.

Sia

Sia $x + \sqrt[3]{a^2 x} = \sqrt{ax}$; si faccia $n = \sqrt[3]{a^2 x}$
$m = \sqrt{ax}$

ed invece dell' equazione data si avrà $x + n = m$; d'onde $n = m - x$, ed elevando alla terza potenza ciascun membro si avrà $n^3 = m^3 - 3m^2 x + 3mx^2 - x^3$, ossia $n^3 + 3m^2 x + x^3 = m^3 + 3mx^2$; in quest' ultima equazione si suppongano le quantità commensurabili $n^3 + 3m^2 x + x^3$ eguali ad f^3, e si alzi, a cagione dell' $m = \sqrt{ax}$, ciascun membro dell' equazione $m^3 + 3mx^2 = f^3$ alla seconda potenza; si avrà $m^6 + 6m^4 x^2 + 9m^2 x^4 = f^6$, che non conterrà più incommensurabile alcuna, dopo la sostituzione de' valori di f, m, n.

79. Questi ed altri simili sono gli usi delle trasformazioni delle equazioni, tutti necessarj per disporre l'equazione, che si ha da un problema a farci conoscere i valori dell' incognita, per cui è ordinata. La più usuale tralle addotte trasformazioni è quella del num. 68. applicata a togliere il secondo termine d'una data equazione; la trasformazione del num. 78. serve per conoscere il grado vero d'una data equazione.

Analisi delle equazioni di primo grado.

80. Dalle cose fin qui dette è manifesto, che per non turbare l'eguaglianza che passa trai due membri d'un' equazione si devono fare in un membro le operazioni stesse, che si fanno nell' altro; come sarebbe aggiungere ad amendue i membri, o sottrarre da' medesimi una stessa quantità, o quantità eguali; multiplicare, o dividere ciascun membro per una stessa quantità, o per quantità eguali; formare la stessa potenza, o estrarre la stessa radice da un membro, che si forma, o si estrae dall' altro; finalmente sostituire in un' equa-

equazione invece d'un termine, o d'una lettera un altro termine, od un' altra lettera eguale alle prime. Finchè si opererà sull' equazione in questo modo, saranno sempre legittime le conseguenze che se ne dedurranno; or questi, e non altri sono gli artificj dell' Analisi; Incominciamo dalle equazioni di primo grado.

81. Se l'equazione non contiene più d'una incognita x; si traspongano in un solo membro dell' equazione tutti i termini che contengono l'x, lasciando gli altri nell' altro membro; si facciano su amendue i membri dell' equazione le operazioni a quelle contrarie, per cui resta l'x inviluppato con altre quantità; cioè se è diviso per a, si multiplichi tutta l'equazione per a; se è multiplicato per a, si divida per a tutta l'equazione... ec.; finoattantochè resti l'x da se solo in un membro, e le quantità cognite nell'altro membro dell'equazione. Si cerchi il valore di

$ax \div bc = \frac{dx}{c} \div ca$; si avrà, trasponendo $\frac{dx}{c}$, e bc,

$ax - \frac{dx}{c} = ca - bc$; multiplicando tutto per c, si ha cax

$- dx = c^2 a - bc^2$; ossia

$(ca - d)x = c^2 a - bc^2$, e dividendo per $ca - d$ si ha finalmente $x = \frac{c^2 a - bc^2}{ca - d}$.

Con queste, ed altre simili operazioni si *libera* l'incognita d'un' equazione data; cioè si esprime con quantità conosciute l'incognita della data equazione.

82. Se l'equazione contiene più d'un' incognita, per avere determinatamente il valore di ciascuna incognita, si suppongono date tante equazioni, quante sono le incognite, ed a queste si applicano le sovra esposte riduzioni per le equazioni ad una sola incognita co' tre seguenti metodi.

Primo metodo. Siano, a cagione d'esempio, due le equazioni del

del problema a due incognite; $ax + by = a^2$; $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$; 1.° Si maneggi una di queſte equazioni, come non conteneſſe più d'una incognita; dalla prima equazione, ſi avrà $x = \frac{a^2 - by}{a}$; 2.° Si ſoſtituiſca queſto valore di x nella ſeconda equazione; ſi avrà $\frac{ay}{c} = b - \frac{fa^2 - fby}{a^2}$; 3.° Soſtituendo il valore di y, preſo in queſta equazione, nel valore di x trovato prima, ſi ha $x = a - \frac{b^2ca + bcfa}{a^3 - bcf} = \frac{a^4 - ab^2}{a^3 - bcf}c$.

Secondo metodo. Quando in ciaſcuna delle date equazioni ſi trovano le ſteſſe incognite; ſi prenda in ciaſcuna il valore d'una ſteſſa incognita; ſi faccia eguale il valore primo dell' incognita al ſecondo, il ſecondo al terzo . . . ec.; ſi avrà un' equazione, ed una incognita meno delle prime; ſu queſte ſi operi allo ſteſſo modo, e ſi ripeta la ſteſſa operazione, fino ad avere una ſola equazione, con una ſola incognita; il valore di queſta, ſoſtituito nella penultima, darà il valore d'un' altra incognita; il valore di queſte due, ſoſtituito nelle altre, ci darà... ec. Nel propoſto eſempio. 1.° Si ha dalla prima equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$, e dalla ſeconda equazione ſi ha $x = \frac{abc - a^2y}{cf}$; 2.° Facendo un'equazione di queſti due valori d'x ſi ha $\frac{a^2 - by}{a} = \frac{abc - a^2y}{cf}$; d'onde cavando il valore di y, e ſoſtituendolo in uno de' valori di x, ſi avrà x.

Terzo metodo. Se i termini delle equazioni, che contengono le ſteſſe incognite preſi ſenza ſegni ſono identici, ed inſieme ſiano congiunti co' ſegni contrarj, coll' addizione delle equazioni, e colle note ſoſtituzioni, ſi avranno i valori delle incognite: Se

ci sia la contrarietà de' segni, ma l'identità manchi de' termini delle equazioni, si riducano questi all' identità, multiplicando un' equazione per il coeficiente d'un' incognita dell' altre, e si faccia l'addizione delle equazioni: Se oltre l'identità de' termini manchi ancora la contrarietà de' segni, si riducano i termini all' identità, ed invece di aggiungere un' equazione all' altra, si sottragga una dall' altra.

Primo caso. $ax+by=c$; $ax-by=d$, equazioni, in cui ax, by si trovano in amendue le equazioni, ed il segno di by in una è $+$ nell'altra è $-$; sommando queste due equazioni si ha $2ax=c+d$, ossia $x=\frac{c+d}{2a}$; sostituendo questo valore di x in qualunque delle date equazioni si avrà l'y.

Secondo caso. $ax-by=e$; $ex+fy=d$; Si multiplichi la prima equazione per f, e la seconda per b, coeficienti di y; si avrà $afx-bfy=ef$; $bex+bfy=df$; equazioni, in cui i termini, che contengono l'y sono identici; e perchè non manca la contrarietà de' segni, col sommare insieme queste due equazioni, si avrà $(af+be)x=ef+df$; ossia $x=\frac{ef+df}{af+be}$; se si rendano identici i termini, che contengono l'y, si avrà l'y.

E' evidente, che nel terzo caso $ax+by=c$, $ex+fy=d$, rendendo identici i termini di x; o di y, la differenza delle equazioni darà allo stesso modo, o l'x, o l'y. Quest' ultimo metodo si stende, come gli altri due, a tre, a quattro.... equazioni formate da tre, da quattro.... incognite.

83. Se il numero delle incognite fosse maggiore del numero delle equazioni, non si potrà determinare il loro valore, senza assumere ad arbitrio il valore di alcune incognite. Dato $3x+2y=4$, si avrà $x=\frac{4-2y}{3}$, e questo valore di x dipenderà dal valore arbitrario che si dia ad y; cioè x avrà infiniti valori.

Ana-

84. NOi qui consideriamo solamente il caso, in cui nella equazione data non c'entri più d'un' incognita; negli altri casi, si dovranno maneggiare i metodi, che esporremo, conformemente a ciò, che s'è detto per le equazioni a più incognite di grado primo. Ma conviene prima di tutto distinguere l'equazoni che hanno tutte, o qualcuna delle sue radici commensurabili, e razionali, da quelle che le hanno immaginarie, o reali incommensurabili. Qualunque poi sia l'equazione, e qualunque il genere delle sue radici, dovrà sempre essere ridotta colle trasformazioni spiegate sopra, a non avere nè frazioni, nè radicali, nè altro coeficiente fuor dell' unità al primo, o più elevato suo termine.

85. Per le equazioni, che hanno qualche radice commensurabile. Si separi la data equazione in due somme qualunque, A, B; per esempio in una si mettano tutte le quantità, che contengono una lettera conosciuta, e nall' altra si scrivano tutte le altre quantità. Ordinando queste due somme per x, si cerchi il massimo comune divisore delle medesime; se egli è un' equazione lineare, o di primo grado, ci darà un valore dell' incognita x; altrimenti, dividendo la data equazione per questo massimo comune divisore, si avrà per quoto, o un' equazione lineare, che contiene un valore d'x, o un' equazione composta, che, multiplicata col trovato comune divisore massimo, restituirebbe la data equazione; ciascuna di queste equazioni particolari si maneggi come la data, e le loro radici commensurabili saranno le radici della data.

86. Espongo il metodo per trovare il massimo comune divisore delle due somme A, B.
Si divida la maggiore quantità A per la minore B; se la divisione si fa senza residuo, è evidente che B sarà il massimo di-

 visore

visore cercato. 2.° Se v'ha qualche residuo C, non si badi al quoto della prima divisione, e si divida B per C; se la divisione si fa senza residuo, sarà C il massimo divisore cercato. 3.° Si continui per simil modo l'operazione, non curando i quoti delle divisioni, ed il residuo D, che dividerà esattamente l'ultimo divisore, sarà il divisore cercato.

Dimostrazione. 1.° Se d è divisore di a, sarà d divisore di ma; Se d è divisore di $a = b + c$, e di una delle parti b, sarà d divisore dell' altra parte c; questi sono assiomi.

2.° Sia $\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B}$ . . . . . sarà $A = mB + C$

$\frac{B}{C} = n + \frac{D}{C}$ . . . . . sarà $B = nC + D$

$\frac{C}{D} = p$ . . . . sarà $C = pD$

3.° D è divisore di C; dunque D è divisore di nC, e per essere D divisore di se stesso, sarà D divisore di $nC + D = B$; e per la stessa ragione sarà D divisore di A; dunque D è divisore comune di A, B. Innoltre; il massimo divisore di A, B, deve essere divisore di $mB + C$, cioè di C, è di nC, ossia di D; dunque il massimo divisore di A, B non può essere diverso da D, altrimenti sarebbe minore di un divisore D, cioè non sarebbe il massimo.

87. 1.° Si potrebbe collo stesso metodo trovare il massimo comune divisore di più quantità A, B, C; Si cerchi il massimo divisore q di A, B, ed il massimo comune divisore r di q, C, sarà r il massimo comune divisore di A, B, C; ma per ora noi non abbiamo bisogno di tanto. 2.° Il metodo di trovare il massimo divisore r di due quantità, serve ancora per ridurre una frazione a minimi termini, dividendo ciascun termine per r.

88. Se le date quantità A, B sieno quantità complesse, come lo sono veramente nel caso del num. 85., è necessario ordinarle

narle per rapporto ad una lettera; quindi 1.° Se nelle quantità A, B così ordinate si scopra ad occhio una quantità a, o numerica, od algebraica comune a tutti i termini d'amendue le quantità date, quella quantità comune sarà un divisore da notarsi in disparte, ed il comune massimo divisore de' quozienti delle date quantità divise per a, si dovrà multiplicare per quel primo divisore.

2.° Se prima di fare la divisione di A, B, si scopra che tutti i termini del divisore B siano multiplicati per una stessa quantità a, che non sia divisore di A, si prenda per divisore $\frac{B}{a}$, trascurando a: Sia detto lo stesso del dividendo A.

3.° Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia minore in una quantità, che nell' altra, quella prima quantità si dovrà prendere per divisore, e l'altra per dividendo; Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia eguale in A, ed in B, si può prendere qualunque delle due date quantità per dividendo.

4.° Se nel fare taluna delle prescritte divisioni, si trovi per quoto una frazione; Si riduca la frazione a minimi termini, e pel denominatore della ridotta si multiplichi il dividendo, e si rincominci da capo l'operazione.

89. Applico il metodo del num. 85. ad un esempio. Si cerchino le radici commensurabili di

$$\begin{aligned} x^3 &- 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b = 0. \\ &- cx^2 + 3acx + 3abc \\ &+ bx^2 - 2abx \\ & - bcx \end{aligned}$$

Si separi l'equazione in due somme; cioè in una si mettano, a cagione d'esempio, le quantità che contengono la lettera c, e nell' altra le altre; si avrà

$$A \ldots x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b; \text{ ed } -cx^2 + 3acx + 3abc$$
$$+ bx^2 - 2abx \qquad\qquad - bcx$$

Nella

Nella seconda somma c'entra in tutti i termini la lettera c, e dividendola per $-c$, si ha $B \ldots\ldots x^2 - 3ax - 3ab$
$+ bx$

Dividendo A per B, non si ha alcun residuo, cioè B è divisore di A, e di se stesso, cioè della proposta; ma per essere B un' equazione composta, si dovrà dividere la proposta per B, ed avendosi per quoto $x + a - c$, sarà $x = c - a$ una delle radici cercate, e maneggiando B come se fosse la proposta, si avranno le altre due radici della proposta, cioè $x = 3a$; $x = -b$.

90. Il metodo precedente si applica soltanto alle equazioni letterali. Per le equazioni, o letterali, o numeriche, si rifletta, che l'ultimo termine di qualunque equazione è eguale al prodotto di tutte le radici; quindi è, che qualcuno de' divisori dell' ultimo termine della data equazione, sostituito invece dell'incognita x, col segno $+$, o col segno $-$ renderà la somma de' termini eguale a zero; Si cerchino adunque tutti i divisori dell' ultimo termine d'un' equazione; si sostituisca ciascuno di questi divisori, col segno $+$, e col segno $-$ invece dell' x; tutti quegli, che faranno eguale a zero la somma de' termini dell' equazione, presi col segno contrario, saranno radici della medesima. Nell' equazione superiore, cercando tutti i divisori di $3abc - 3a^2b$, se ne troveranno tre, cioè b, $-3a$, $a - c$, che rendono l'equazione eguale a zero, se si sostituiscano invece dell' x; Sarà dunque $x = -b$

$$x = 3a$$
$$x = c - a$$

La difficoltà di trovare tutti i divisori complessi dell' ultimo termine d'un' equazione letterale, fa preferire le più volte il metodo del numero precedente per trovare le radici d'una letterale equazione; ed il presente si riserva per le equazioni numeriche.

91. Se non si trovi verun comune divisore massimo delle due somme (num. 89), o se nessuno de' divisori dell' ultimo termine

mine

mine d'un' equazione, sostituito invece d'x, faccia eguale a zero (num. 90.) la somma de' termini d'un' equazione, egli è certo, che le radici della proposta equazione non sono commensurabili; ma sibbene, o reali incommensurabili, o immaginarie, o miste d'incommensurabili, e d'immaginarie. Dalle cose dette sulle radici immaginarie (num. 64.), è evidente, che nelle equazioni di secondo grado possono essere tutte le radici immaginarie; nelle equazioni di terzo grado possono essere al più due immaginarie, in quelle di quarto grado, o due, o tutte; in quelle di quinto, o due, o quattro... ec.; quindi nelle equazioni di grado impari almeno una delle radici è reale. Se l'equazione di terzo grado a tre radici reali, ed incommensurabili, con nessun artificio analitico si potranno trovare i loro valori, e questo caso si chiama caso *irredutibile*; Se l'equazione di quarto grado ha tre radici reali incommensurabili, la quarta sarà reale, e commensurabile da trovarsi coi metodi de' numeri precedenti. In generale poi trovato un valore a d'un' equazione ordinata per x; dividendo la data equazione per $x-a=0$, si abbasserà d'un grado l'equazione medesima.

92. Si noti di più, che il vero grado delle equazioni non sempre è indicato dall' esponente massimo dell' incognita, per cui è ordinata. Le equazioni di secondo grado possono essere composte da due del primo; quelle di terzo possono essere composte da una del secondo, e da una del primo, oppure da tre del primo; quelle di quarto grado possono essere composte da quattro del primo, o da due del secondo, o da una del terzo, e da una del primo, e così nelle altre. Riservo (come al n. 58.) ad un' altra operetta la ricerca delle equazioni composte, che multiplicate insieme formano l'equazione data; cioè la ricerca de' fattori complessi d'una data quantità. Supponendo ora, che le componenti siano della forma $x-a=0$, se a è una quantità commensurabile, si troverà coi metodi già esposti, se a è una quantità

tità incommensurabile, si potrà trovare con quegli che esporrò qui sotto.

93. Finalmente si noti, che con facili sostituzioni si riducono molte equazioni di grado superiore alla forma delle equazioni di grado più depresso.

L'equazione $A \ldots a^4 - \frac{2q}{b} a^2 + \begin{matrix} p^2 \\ -pb^2 \\ +\frac{1}{4}b^4 \end{matrix} = 0$, che sembra di quarto grado per l'a^4, si riduce ad una del secondo, facendo $a^2 = t$; cioè si riduce a $t^2 - \frac{2q}{b} t + \begin{matrix} p^2 \\ -pb^2 \\ +\frac{1}{4}b^4 \end{matrix} = 0$; l'equazione A si chiama *derivativa* del secondo grado. Così $B \ldots b^6 - 2sb^4 + \begin{matrix} s^2 b^2 \\ +v b^2 \end{matrix} - t^2 = 0$, che sembra, per il b^6, di sesto grado, si riduce ad una del terzo, facendo $b^2 = z$, cioè si riduce a $z^3 - 2sz^2 + \begin{matrix} s^2 b^2 \\ +v b^2 \end{matrix} - t^2 = 0$; l'equazione B, si chiama *derivativa* del terzo grado... ec. E' evidente, che sostituendo le radici delle equazioni derivate t, z nelle supposte $a^2 = t$, $b^2 = z$, si avranno con una semplice estrazione di radici, i valori di a, b delle derivative.

94. Trovare il valore d'x delle equazioni di secondo grado $x^2 - px - q = 0$.

Si supponga $x = y + \frac{1}{2}p$, affine di togliere il secondo termine della data equazione, si avrà $y^2 - \begin{matrix} \frac{1}{4}p^2 \\ -q \end{matrix} = 0$; cioè $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$, ed estraendo da amendue i membri di questa equazione la ra-

radice seconda, si ha $y = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; ed essendo $x = y + \frac{1}{2}p$, sarà $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$

La preparazione di togliere il secondo termine della proposta equazione, si supporrà già fatta nel problema seguente, che comprende le equazioni d'ogni grado più elevato del secondo.

95. Trovare il valore d'x dell' equazione

$$A \ldots x^m - Bx^{m-1} - Cx^{m-3} - Dx^{m-4} \ldots - Q = 0.$$

1.° Si rappresenti la radice cercata x con tante lettere $a, b, c \ldots$ ec. quante sono unità nell'esponente m del grado dell'equazione A, una meno; cioè per le equazioni di terzo grado, si supponga

$$x = a + b$$

per quelle di quarto... $x = a + b + c$

per quelle di quinto... $x = a + b + c + d$

.... ec.

2.° Si alzi ciascun membro di quest'equazione ipotetica alla potenza di grado m.

3.° Si separino dal secondo membro di quest' ultima equazione le quantità, che corrispondono ad x^{m-1}, x^{m-2}.... ec.

4.° Si introducano nello stesso secondo membro gli x^{m-1}, x^{m-2} .... invece de' loro valori espressi in a, b...., e trasponendo si faccia tutta l'equazione eguale a zero; si avrà A'.

5.° Si suppongano i coeficienti de' termini di A', eguali ai coeficienti de' termini corrispondenti di A, e combinando insieme le equazioni, che ne risulteranno, si ricavino i valori di a, b, c... ec.

96. Prima di fare l'applicazione del metodo, è necessario dimostrare un teorema, che ha frequentissimo uso in tutta l'analisi, e su cui si appoggia tutta la risoluzione delle equazioni, che ora spieghiamo; egli è il seguente.

Se $ax+bx^2+cx^3$ .... ec. $=ex+fx^2+gx^3$ .... ec. farà $a=e$

$b=f$

$c=g$

... ec.

Il Sig. Sketch nel suo opuscolo inglese sulle *flussioni*, lo dimostra pel caso, che x sia una piccolissima frazione, o, come dicono più propriamente, una quantità infinitamente piccola. Si divida, dice, ciascun membro dell' equazione per x; si avrà $a+bx+cx^2$ ... ec. $=e+fx+gx^2$ ... ec., e per essere infinitamente piccola fx, non si turberà l'equazione, sprezzando bx, cx^2, ... fx, gx^2 ...., farà dunque $a=e$. Levando ora dalla equazione già ridotta per mezzo della divisione, le quantità eguali a, e, farà $bx+cx^2+$ .... ec. $=fx+gx^2+$ ... ec. sulla quale si potrà ripetere all' infinito la stessa dimostrazione.

Quando l'x non sia una quantità infinitamente piccola, ciocchè sempre si suppone nell' Analisi finita, è evidente, che riducendo l'equazione alla forma $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}$ ..... ec. $=0$, il coeficiente a conterrà la somma delle radici, b il prodotto delle radici prese due a due.... ec.; dunque se questa equazione si suppone identica con $x^m+ex^{m-1}+fx^{m-2}$ .... ec. $=0$, il coeficiente e conterrà la somma delle radici della prima equazione, b il prodotto delle medesime, prese a due a due ... ec.; cioè farà

$a=e$;

$b=f$

... ec. Quindi a ragione suppongono gli Analisti eguali i termini, o i coeficienti de' termini corrispondenti di due date equazioni identiche: Intendono essi che ciò si faccia, quando dicono di *paragonare i termini* di due date equazioni supposte eguali.

97. Applicazione del metodo. Sia la proposta di grado terzo X...... $x^3-px-q=0$, e la radice cercata $x=a+b$; farà

$$x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Quale è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata

cata per $x = a + b$? Fatta un po di riflessione, si vede subito, che $3a^2b + 3ab^2$ è eguale a $3ab$ multiplicato per $a+b$, cioè per x; invece dunque di $3a^2b + 3ab^2$ si potrà scrivere $3abx$, e si avrà

$$A' \ldots x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$$

che è un' equazione identica all' A. Quindi $\left.\begin{array}{l} 3ab = p \\ a^3 + b^3 = q \end{array}\right\} = B$

Dalla prima di queste equazioni si ha . . . . . $ab = \frac{1}{3}p$

$$a^3b^3 = \frac{1}{27}p^3$$

e dalla seconda si ha . . . . $(a^3 + b^3)a^3 = a^3 q$

cioè $a^6 + a^3b^3 = a^3 q$,

e fatta la sostituzione del valore di a^3b^3 dedotto dalla prima equazione si ha $a^6 - qa^3 = -\frac{1}{27}p^3$

che è un' equazione derivativa di secondo grado; d'onde

$$a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

Resta a determinarsi il b; ma sostituendo il valore di x, e di a^3 nelle equazioni B, si ha

dalla prima

$$b = \frac{p}{3a} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

H 2 e dalla

e dalla seconda

$$b = \sqrt[3]{q - a^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

donde

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

oppure

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

98. Sia la proposta $A \ldots\ldots x^4 - px^2 - qx - r = 0$, e la radice cercata $x = a + b + c$; sarà

$$\begin{aligned} x^4 = a^4 &+ 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4 = 0 \\ &+ 4ca^3 + 12bca^2 + 12b^2ca + 4b^3c \\ &+ 6c^2a^2 + 12bc^2a + 6b^2c^2 \\ &+ 4c^3a + 8bc^3 \\ &+ c^4 \end{aligned}$$

Qual' è

Qual'è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata per $x^2 = (a+b+c)^2$, e quale è quella, che è multiplicata per $x = a+b+c$? Si disponga il secondo membro nel modo seguente

$$\left.\begin{array}{l} 4ca^3 + 2ba^2 + 4b^3 a + 2b^4 \\ \quad + 8bca^2 + 8b^2 ca + 4b^3 c \\ \quad + 8c^2 a^2 + 4bc^2 a + 2b^2 c^2 \\ \qquad\qquad + 4c^3 a \end{array}\right\} = B$$

$$\left.\begin{array}{l} 4ba^3 + 4b^2 a^2 + 4bc^2 a + 4b^2 c^2 \\ \quad + 4bca^2 \qquad\qquad\quad + 4bc^3 \end{array}\right\} = C$$

$$\left.\begin{array}{l} a^4 + * - 2c^2 a^2 + 4b^2 ca + c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - b^4 \end{array}\right\} = D$$

Facendo la divisione di B per x^2, ossia per $(a+b+c)^2$, si troverà

$$B = (2b^2 + 4ac)(a+b+c)^2 = (2b^2 + 4ac)x^2,$$

e facendo la divisione di C per x, ossia per $a+b+c$, si troverà

$$C = (4ba^2 + 4bc^2)(a+b+c) = (4ba^2 + 4bc^2)\,x$$

restando D non divisibile per x, cioè senza x per fattore. Quindi l'equazione ipotetica si cambierà in questa

$$\begin{array}{llll} A'.....x^4 & - 2b^2 x^2 & - 4ba^2 x & - a^4 \quad = 0 \\ & - 4acx^2 & - 4bc^2 x & + 2c^2 a^2 \\ & & & - 4b^2 ca \\ & & & - c^4 \\ & & & + b^4 \end{array}$$

Para-

Paragonando A' con A, si ha 1.° $b^6 - \frac{1}{2} p b^4 + \frac{1}{4} r b^2 - \frac{1}{64} q^2 = 0$

$$+ \frac{1}{16} p^2 b^2$$

2.° $a^4 - \frac{q}{4b} a^2 + \frac{1}{16} p^2 = 0$

$$- \frac{1}{4} p b^2$$

$$+ \frac{1}{4} b^4$$

3.° $c = \frac{p - 2b^2}{2a}$

La prima equazione è derivativa del terzo grado, e darà b; la seconda è derivativa del secondo grado, e darà a; la terza è di primo grado, ed esprime il valore di c.

Per applicare queste equazioni più comodamente alle formole de' num. precedenti, si introducano alcune denominazioni ausiliarie ad arbitrio, da rimettersi al primo valore dopo finiti i calcoli necessarj per iscioglierle; così nella prima equazione fatto $p = 4s$, $q = 8t$, $r = 4v$, si avrà

$$b^6 - 2 s b^4 + s^2 b^2 - t^2 = 0$$

$$+ v b^2$$

99. E' evidente, che il metodo è universale per ogni grado; per avere le radici d'un' equazione di quinto grado, si dovrà sciogliere un' equazione di quarto grado, una del terzo, una del secondo, ed una del primo, ed in generale, per avere le radici d'un' equazione di grado m, si doveranno sciogliere tutte le equazioni di grado inferiore fino inclusivamente il primo. Vero è, che per la lunghezza de' calcoli che devono farsi in questo metodo, si ha ricorso ad altri metodi più semplici, presi dalle equazioni indeterminate; noi gli spiegheremo altrove; intanto

tanto credo, che farà piacere ai lettori il vedere come *con una sola trasformazione del primo termine di qualunque data equazione*, si hanno le sue radici. Il Varignon (Acad. Royal. 1699.) ha trovate per questa strada le radici delle equazioni di secondo e terzo grado solamente, senza accennare che si poteva stendere a tutte l'altre equazioni.

100. Per l'equazione $x^3 \mp px \pm q = 0$; 1.° Se $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$, le due radici positive, o negative (la somma delle quali è eguale alla terza), sono sempre eguali tra se: Se il p sia negativo, ed $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$, due radici dell' equazione sono immaginarie: Se $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, le tre radici sono tutte reali, ed ineguali.

2.° Nel primo caso, ciascuna delle radici eguali sarà sempre $\frac{\pm 3q}{\mp 2p}$: Nel secondo caso (che, per le cose dette, vale anche quando il solo p sia positivo), si chiami r^2 un quadrato maggiore di p, ed $s = r^2 \pm p$, se sia $\frac{q}{s} = r$, sarà $\frac{\pm q}{s}$ la radice dell' equazione, quando essa sia commensurabile: Nel terzo caso, $\frac{\pm q}{s}$ sarà, come prima, la radice massima dell' equazione, e preso r^2 minore di p sarà similmente una delle minori radici. Il segno da premettersi al valore delle radici trovate sarà sempre contrario al segno de' quoti delle accennate divisioni, e se non si trovi l'r^2 colle due proprietà indicate, la radice sarà incommensurabile da cercarsi colla formola dimostrata.

3.° Comunque nel caso irredutibile la formola generale dia le ra-

radici dell' equazione sotto forme immaginarie, riducendo in serie infinite la formola medesima, si avrà un' approssimazione alle radici vere, e spogliata delle quantità immaginarie. La dimostrazione di questa verità appartiene al libro secondo di questa trattazione, dove si parla delle serie infinite; fatto $\frac{1}{2}q = a$, e

$$\sqrt{\frac{1}{2}q^2 - \frac{4}{27}p^3} = b\sqrt{-1},$$

sarà $x = \sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a \mp b\sqrt{-1}}$,

e svolgendo in serie ciascuno di questi radicali, la loro somma sarà reale, e se una delle quantità b, a sia molto maggiore dell' altra, con pochi termini della serie si avrà un valore d'x prossimamente vero; come ciascuno potrà vedere da se, dopo la teoría dell' evoluzione delle serie. Queste riflessioni sulle radici delle equazioni di terzo grado, daranno molto lume per le radici di grado quarto: Conchiudo questa Introduzione con un problema.

101. Problema. Due sorgenti, ciascuna delle quali scola uniformemente, hanno empiuto uno de' sottoposti conservatoj a, la prima nel tempo b, la seconda nel tempo c, ed il conservatojo d, la prima nel tempo e, la seconda nel tempo f; si cerca quant' acqua sia uscita da ciascuna sorgente.

1.° Siano x, y le quantità d'acqua, cioè il numero a cagione d'esempio de' secchi d'acqua usciti ad empire le conserve a, d, nel corso di giorni b, c, e, f. Sarà bx la quantità d'acqua uscita dalla prima sorgente nel tempo b, e cy la quantità d'acqua uscita dalla seconda sorgente nel tempo c; per le condizioni del problema, queste due quantità d'acqua devono essere eguali

eguali alla quantità d'acqua a, che empie il conservatojo; si avrà dunque $bx + cy = a$.

2.° Se nel problema non entrasse altra condizione che questa, non si potrebbe determinare nè l'x, nè l'y, se non mettendo un arbitrario valore ad y, o ad x; avendosi, trasponendo

$$bx = a - cy$$

$$cy = a - bx,$$ e dividendo la prima equazione per b, e la seconda per c, si avrebbe

$$x = \frac{a - cy}{b}$$

$$y = \frac{a - bx}{c},$$ e facendo $y = h$ nella prima, ed $x = k$ nella seconda, si avrebbe

$$x = \frac{a - ch}{b};$$

$$y = \frac{a - bk}{c}$$ questo problema perciò sarebbe indeterminato, ed ammetterebbe infinite soluzioni, secondo gli infiniti arbitrarj valori di h, e di k.

3.° Ma la seconda condizione del proposto problema, ci dà una nuova equazione, e determina con ciò ad una sola soluzione i valori delle due incognite x, y; dacchè si avrà ex, fy per le quantità d'acqua sparse nel tempo e, f, che prese insieme devono essere eguali a d; cioè $ex + fy = d$.

4.° Mettendo in questa equazione il valore d'x preso nella prima, e sostituendo nella prima il valore d'y presi da questa seconda equazione, si ha $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$.

$$y = \frac{ae - db}{ce - bf}.$$

102. Se

102. Se sia $a = 195$ ..... $d = 330$; sarà $x = 30$
$b = 2$ $e = 5$ $y = 45$
$c = 3$ $f = 4$

Se $a = 120$ ..... $d = 190$; sarà $x = -30$
$b = 4$ $e = 3$ $y = 40$
$c = 6$ $f = 7$

Questi risultati adempiono esattamente tutte le condizioni del problema; nè si può anche per ciò dubitare della loro esattezza; ma che significa quel -30? Si ritenga il significato del segno $-$; si cerca quì quanta sia l'acqua che esce dalla prima sorgente, e si trova che n'esce -30 misure; lo stato opposto all'uscire non è altro che l'entrare; onde la prima sorgente tanto non ne perde, che anzi ne acquista 30, ne ruba invece di darne, invece d'impoverire arricchisce; se ciò non può succedere in qualche caso particolare, o per la natura, o per la posizione delle sorgenti, sarà pure impossibile, che si sieno verificate in quel caso le condizioni date.

103. Se oltre la somma delle perdite d'acqua a, d, ed oltre i tempi b, c, e, f si desse ancora il prodotto delle due perdite; cioè $xy = g$, il problema avrebbe più condizioni, o più equazioni che incognite; cioè sarebbe *più che determinato*. Questo eccesso di equazioni, o condizioni rendono per lo più impossibile il problema; cioè nel caso nostro sarà impossibile il problema sempre che g non sarà eguale a $\frac{cd - af}{ce - bf} \times \frac{ae - db}{ce - bf} = h$, e quando ciò succeda, si avrà sempre un' equazione identica; cioè $g = h$, cioè la condizione aggiunta sarà un' equazione inutile al problema, già sciolto per le altre due. Ben è vero, che l'identità delle equazioni non sempre mostra l'inutilità delle condizioni date; talvolta è segno, che la quistione malamente fu proposta a modo di problema, ma si veramente doveva profe-

rirsi

rirsi come un teorema; talvolta altresì mostra, che si è assunta una condizione superflua, ommessa quella che era necessaria alla soluzione del problema; talvolta finalmente indica, che s'è commesso errore nel calcolo.

LIBRO PRIMO.

Progressioni geometriche, ed aritmetiche.

CAPO PRIMO.

Delle ragioni geometriche, ed aritmetiche.

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche.

1. LA teoría delle Progressioni geometriche, ed aritmetiche, suppone quella delle geometriche, ed aritmetiche ragioni, ed immediatamente trae seco la teoría de' logaritmi. Questa sarà la materia de' tre capi, in cui va distinto il presente libro, e la tratterò, spero, non senza qualche particolare eleganza, usando ad ogni passo gli artificj analitici, poc'anzi spiegati nell' introduzione.

2. Ragioni geometriche. Le voci *ragioni*, *rapporto*, significano un confronto, o un paragone di una quantità qualunque con un' altra; quando si paragona una quantità con un' altra per conoscere quante volte, o come la prima contenga l'altra, o sia nell'altra contenuta, quel rapporto, e quella ragione delle due date quantità si chiama rapporto, o ragione *geometrica*, o senz' altro aggiunto, *ragione*.

3. E' evidente. 1.° Che per avere una ragione geometrica si richieggono nè più nè meno di due termini; cioè quello, che si paragona, e quello, a cui si paragona.
2.° Che la ragione geometrica di questi due termini si conosce colla divisione d'uno d'essi per l'altro.
3.° Che quindi si può dinotare la ragione geometrica co' soliti *due punti* di divisione, o a modo d'una frazione volgare, e allora $a : b$, oppure $\frac{a}{b}$ si legge a sta a b.
4.° Che la proprietà delle frazioni volgari si convengono alle ra-

ragioni geometriche, e quelle delle ragioni geometriche si convengono alle frazioni volgari.

5.° Che le quantità, tralle quali si fa il paragone per iscoprire la ragione di *contenenza* d'una nell'altra, devono essere della medesima specie, ed insieme considerate come quantità, o numeri astratti; cioè non considerate secondo il loro essere specifico, ma secondo l'essere numerico di ciascuna.

4. Nelle ragioni geometriche. 1.° Il primo termine, che si paragona coll'altro, si chiama *antecedente*, ed il secondo *conseguente* della ragione; il quoto della divisione dell'antecedente pel conseguente, si chiama *esponente* della ragione, e se l'esponente della ragione è una frazione, si suppone essa ridotta a minimi termini. 2.° Se l'antecedente è eguale al conseguente, la ragione geometrica si chiama ragione d'*ugguaglianza*: Se l'antecedente è maggiore del conseguente, la ragione sarà di *maggiore disuguaglianza*: Se l'antecedente è minore del conseguente, la ragione sarà di *minore disuguaglianza*. 3.° Se il rapporto, che in una ragione ha l'antecedente al conseguente sia lo stesso che il rapporto, che in un'altra ragione ha il conseguente all'antecedente, si dice, che i termini della prima tra loro stanno in ragione *inversa*, o *reciproca* de' termini della seconda; e se l'antecedente di una ragione ha al suo conseguente lo stesso rapporto, che l'antecedente di un' altra al suo conseguente, si dice, che i termini della prima stanno fra loro in ragione *diretta* de' termini della seconda ragione.

4.° Se si multiplichino insieme molte ragioni *semplici* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, si chiama $\frac{ace}{bdf}$ ragione *composta* delle date; Se le ragioni componenti sono tutte tra se eguali, la ragione composta delle date ragioni prese due a due, si chiama ragione *dupplicata*: prese a tre a tre *triplicata*: prese n ad n, $n^{plicata}$ di qualunque delle date: Ciascuna delle ragioni componenti, sta in ragione *sudduplicata* della composta sua dupplicata: *sut-*

tri-

triplicata della composta sua triplicata; Su $n^{plicata}$ della composta sua $n^{plicata}$.

5. Assiomi sulle ragioni semplici e composte. 1.° Le ragioni eguali hanno esponenti eguali, e le ragioni, che hanno esponenti eguali, sono eguali.

2.° Le ragioni disuguali hanno esponenti disuguali, e le ragioni d'esponenti disuguali sono disuguali.

3.° In due, o più ragioni, quella è maggiore, o minore delle altre, che ha l'esponente maggiore, o minore, e se l'esponente d'una ragione è maggiore, o minore dell'esponente delle altre, quella ragione è maggiore, o minore delle altre.

4.° Se si paragonino due quantità disuguali a, b, ad un'altra d, la più grande a avrà una maggior ragione a d che le altre, e quella tra a, b, che avrà una maggiore ragione a d, sarà maggiore delle altre.

5.° Paragonando una quantità d a due quantità disuguali a, b, la ragione di d alla più grande a sarà minore della ragione di d all'altra, e se la ragione di d ad una quantità a sarà minore della ragione di d all'altra, sarà a maggiore dell'altra.

6.° Le ragioni di d a diverse quantità eguali sono eguali, e se sono eguali le ragioni di d a diverse quantità, queste saranno tra se eguali.

7.° Non si muta la ragione di a a b comunque si multiplichi, o si divida a, b per una stessa quantità, o per quantità eguali essendo $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$.

10.° Quindi se i termini d'una ragione sieno ugualmente, o multipli, o summultipli de' termini d'un' altra, quella prima ragione sarà a questa eguale.

6. Assiomi sulle ragioni composte. 1.° Se sono eguali ciascuna a ciascuna le ragioni, che compongono due ragioni composte, le ragioni composte sono eguali.

2.° Se

2.° Se una ragione è composta di alcune date ragioni, ogni sua eguale si potrà concepire composta delle ragioni medesime.
3.° Se vi siano due ragioni, composte ciascuna da più ragioni, e tutte le *componenti* della prima e della seconda, toltane una per una, sieno eguali, quelle due residue ancora saranno eguali.

7. Proporzioni geometriche. L'egualianza di due ragioni geometriche, si chiama *proporzione geometrica*, o, senz' altro aggiunto, *proporzione*, o *analogia*; Quindi la teoría delle proporzioni è la stessa, che la teoría delle ragioni eguali.

8. E' evidente. 1.° Che per una proporzione vi vogliono nè più nè meno di quattro termini.
2.° Che la proporzione di quattro termini si conosce dall' egualianza de' quoti del primo termine diviso pel secondo, e del terzo diviso per il quarto; cioè dall' egualianza degli esponenti delle date ragioni.
3.° Che quindi la proporzione di quattro termini a, b, c, d, si può indicare così $a:b=c:d$, oppure $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o segnando solamente le parti estreme del segno d'ugualianza si scrive $a:b::c:d$, e si legge a sta a b, come c sta a d.
4.° Se qualunque specie di quantità si esprima co' numeri, relativi ad una unità arbitrariamente assunta in ogni specie, potranno sostituirsi questi per quelle in ogni proporzione, ed allora i quattro termini d'una proporzione saranno tutti dell' istessa specie.

9. Quanto a quest' ultima riflessione, si noti, che la ragione è un numero, e due ragioni sono due numeri, che risultano da due confronti, che ponno farsi l'uno su d'una specie, e l'altro sull' altra; così lo spazio A, doppio dello spazio B, sta a B come un tempo a, doppio del tempo b, sta a b; ma finchè la proporzione sta espressa così, non si possono fare varie operazioni, che pure sono necessarie a farsi, sulle proporzioni; tale è l'alternazione, ed il prodotto delle quantità eterogenee (dell'

alter-

alternazione parleremo da qui a poco); in questi casi è sempre uopo esprimere in puri numeri le quantità, che servono di termini alla proporzione, e considerare a cagione d'esempio negli spazj A, B, e ne' pesi a, b, non *l'essere* di *spazio*, e di *tempo*, ma l'essere di *doppio* d'uno spazio, o d'un tempo, rispetto all'altro spazio, ed all'altro tempo.
A meglio dichiarare questa importante verità, soggiungo qui le parole del Sig. d'Alembert (*Traité de Dynamique*, alla nota del num. 14.). Essendo, dice egli, lo spazio, ed il tempo di diversa natura, ben si vede, che non si può dividere lo spazio per il tempo: quindi il dire, che le velocità sono come gli spazj divisi per i tempi, egli è un dire, che le velocità sono come i rapporti degli spazj ad una stessa misura comune, divisi per i rapporti de' tempi ad un'altra comune misura; cioè, che se si prenda, a cagione d'esempio, il piede per la misura degli spazj, ed il minuto per la misura de' tempi, le velocità di due corpi, che si muovono uniformemente, sono tra se come i *numeri* de' piedi scorsi da ciascuno, divisi per i *numeri* de' minuti da ciascuno impiegati a scorrergli, e non come i *piedi* divisi per i *minuti*. Così egli; ed a dire più corto colle parole del discorso preliminare del medesimo autore, dividere i spazj per i tempi per avere la ragione delle velocità di due corpi, significa trovare la ragione, che ha *la ragione delle parti dello spazio alla sua unità*, *alla ragione delle parti del tempo alla sua unità*.

10. In qualunque proporzione $a:b::c:d$ i termini a, e c si chiamano *antecedenti* della proporzione, cioè a primo antecedente, c il secondo; i termini b, d si chiamano *conseguenti* della proporzione, cioè b primo conseguente, d secondo conseguente. I termini a, d si chiamano *estremi*, i termini b, c *medj*; ciascuno de' termini antecedenti, o conseguenti si chiama *omologo* all' altro antecedente, o conseguente; ciascuno de' termini estremi può chiamarsi *analogo* all' altro estremo, e ciascun de' termini

 medj

medj può chiamarsi *analogo* all'altro medio: Se i termini di mezzo sono uno stesso termine replicato, la proporzione si chiama *continua*, ed i termini sono *continuamente* proporzionali: Se i termini di mezzo sono tra se disugnali, la proporzione si chiama *discreta*, ed i termini sono *discretamente* proporzionali; il termine di mezzo d'una proporzione continua si chiama *medio geometricamente*, o, senz'altro, *medio* proporzionale.

Proprietà comuni alle eguali ragioni geometriche semplici, e composte.

11. SE $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$

Dim. Si multiplichi ciascun membro dell'equazione data per il prodotto de' conseguenti; o più brevemente, si levino le frazioni dalla data frazione; si avrà $ad=bc$.

12. Se $ad=bc$, sarà 1.° $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

3.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Dim. Si divida ciascun membro della data equazione
1.° per bd, si avrà la prima)
2.° per ac, si avrà la seconda) analogia.
3.° per cd, si avrà la terza)

13. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà 1.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ *invertendo*

2.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ *alternando*

Dim.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà (num. 11.) $ad=bc$; ma fe $ad=bc$, fi ha (num. 12.) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, ed $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; dunque fe $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà ... ec.

14. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà 1.° $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ *componendo*.

2.° $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ *dividendo*.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$, offia $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

15. Se in $a, b, c, \quad d, e, f$ fia $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c}=\frac{e}{f}$, farà $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$ *ordinando*.

Dim. Dalla prima analogìa fi ha $\frac{b}{e}=\frac{a}{d}$, e dalla feconda fi ha $\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$; dunque $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

16. Se nelle fteffe quantità fia $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$, farà pure $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$, *perturbando*.

Dim. Dalla prima analogìa fi ha $af=be$, e dalla feconda fi ha $be=cd$; dunque $af=cd$, d'onde $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

17. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{b}=\frac{f}{d}$, farà 1.° $\frac{a+e}{b}=\frac{c+f}{d}$ *conjungendo*.

2.° $\frac{a-e}{b}=\frac{c-f}{d}$ *difgiungendo*.

Dim.

Dim. Dalla prima analogìa ſi ha $ad = bc$, e dalla ſeconda $ed = bf$; dunque ſommando, e ſottraendo là ſeconda equazione dalla prima ſi ha $ad \pm ed = bc \pm bf$, cioè $(a \pm e)d = (c \pm f)b$; d'onde $\frac{a \pm e}{b} = \frac{c \pm f}{d}$.

18. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \ldots$ ec., ſi ha

1.° $\frac{a + c + e \ldots \text{ec.}}{b + d + f \ldots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *ſommando*.

2.° $\frac{a - c - e \ldots \text{ec.}}{b - d - f \ldots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *ſottraendo*.

Dim. Dalle date ragioni ſi ha (num. 17.) $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$;

donde $\frac{a + c}{e} = \frac{b \pm d}{f}$, ed $\frac{a \pm c \pm e}{e} = \frac{b \pm d \pm f}{f}$;

dunque $\frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec.

19. Dati a, b, ſi ha 1.° $1 : a :: b : ab$

2.° $1 : \frac{a}{b} :: b : a$

La dimoſtrazione è manifeſta dal num. 11., e dalla deffinizione della multiplicazione, e diviſione di a per b.

20. Ben m'avveggo, che le formole così *ſeccamente* eſpoſte in queſt' articolo cagioneranno imbarazzo ai meno eſercitati; accompagneranno eſſi, o mentalmente, o colla penna in mano tutti i calcoli accennati, o ſteſi ne' num. precedenti, ma all' ultimo non ſapranno quale ſia la formalità, che è ſtata preſa di mira in ciaſcuna operazione. Conviene però avvezzarſi ad intendere il linguaggio algebraico, muto sì, ma, a chi ben lo pene-

tra,

tra, assai più d'ogni favella espedito, e penetrante: Si usano i caratteri algebrici per generalizzare le proposizioni: Sta alla fantasia il sostituire agli a, b.... le astratte, o contratte idee delle quantità, di cui nasca il discorso. Quando per esempio si dice, che se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$, s'intenda, che in quattro termini geometricamente proporzionali, il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medj; quando si dice, che se $ad=bc$, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ... ec., s'intenda, che se si separi in due fattori ciascun membro d'un' equazione, si potrà formare con essi reciprocamente presi un' analogia, nella quale se si alternino, o invertano i termini, non si turberà la proporzionalità; od anche, che se in quattro quantità a, b, c, d il prodotto delle estreme è eguale al prodotto di quelle di mezzo, quelle quattro quantità saranno in proporzione geometrica.

21. Si notino principalmente que' dieci modi d'argomentare usitatissimi in tutto il calcolo, ed anche nella geometria. 1.° Se il prodotto di due termini sia eguale al prodotto di due altri termini, comunque essi si ordinino in un' analogia, si conserverà sempre la proporzione, purchè sieno messi per termini analoghi i termini dello stesso prodotto: Tutto ciò si sarebbe potuto esprimere colla sola formola se $ad=bc$, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, indicandosi con ciascuna lettera qualunque termine dello stesso prodotto.

2.° Se quattro termini sono proporzionali, lo saranno sempre, comunque si permutino di sito tra se, purchè que', che sono medj, o estremi nella data analogia restino nelle altre, o estremi, o medj. Due di queste permutazioni hanno nome particolare, e sono l'*alternare*, ove il terzo va ad essere secondo, ed il secondo termine passa ad essere terzo, e l'*invertere*, ove i

con-

confeguenti divengono antecedenti, e gli antecedenti, confeguenti; le altre permutazioni non hanno nome proprio, e non fon altro che alternazioni, o inverfioni ripetute nelle analogie, che nafcono dalla prima alternata, o inverfa, e fono in tutto fette.

Sia $a:b::c:d$

Sarà..... I. $a:c::b:d$.... alternando la data
II. $b:a::d:c$.... invertendo la data
III. $b:d::a:c$.... alternando la II.ª
IV. $d:b::c:a$.... invertendo la III.ª
V. $d:c::b:a$.... alternando la IV.ª
VI. $c:d::a:b$.... invertendo la V.ª
VII. $c:a::d:b$.... alternando la VI.ª

3.° Se i confeguenti d'un'analogia fiano antecedenti d'un'altra, fi argomenta *ordinatamente*, ommettendo i termini comuni alle due analogie, e prendendo gli altri termini per termini d'una proporzione; cioè facendo termini della prima ragione i termini dell'analogia, in cui fi fono ommeffi i confeguenti, e termini della feconda ragione i termini dell'analogia, in cui fi fono ommeffi gli antecedenti.

4.° Se i termini eftremi d'una analogia fiano i termini di mezzo d'un'altra, fi argomenta *perturbatamente*; cioè lafciati i termini comuni fi prendono per i due eftremi i termini dell'analogia, in cui fi fono ommeffi i medj.

5.° Se folamente gli antecedenti fiano diverfi in due analogie, e rifpettivamente eguali i confeguenti, fi argomenta *congiuntamente*; cioè fi congiungono in una proporzione agli antecedenti della prima gli antecedenti della feconda analogia.

6.° ... ec.

Dalle dette diverfe fpecie d'argomentare, fe ne poffono dedurre delle altre non meno utili di quelle prime. 1.° La fomma de' termini della prima ragione d'una proporzione, fta alla fomma de'

de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

2.° La differenza de' termini della prima ragione ſta alla differenza de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

3.° La ſomma de' termini della prima ragione ſta alla ſomma de' termini della ſeconda ragione, come la differenza de' primi termini alla differenza de' ſecondi.

4.° La ſomma de' termini d'una ragione ſta alla differenza de medeſimi, come la ſomma de' termini d'una ragione eguale ſta alla loro differenza.

5.° ... ec.

22. Invertendo la ſeconda analogia del num. 19. ſi ha $\frac{a}{b}$: 1 :: $a : b$; queſto è il fondamento della teoria delle frazioni; cioè la frazione ſta all' unità, come il numeratore ſta al denominatore; quindi 1.° ſe il numeratore d'una frazione è eguale, maggiore, o minore del denominatore, la frazione ſarà eguale, maggiore, o minore dell' unità.

2.° Se le frazioni hanno un medeſimo denominatore, ſono tra ſe in ragione diretta de' numeratori.

3.° Se le frazioni hanno un medeſimo numeratore, ſono tra ſe in ragione reciproca de' denominatori.

4.° Quindi ſe le frazioni hanno diverſi numeratori, e diverſi denominatori, ſono tra ſe in ragione compoſta della diretta de' numeratori, e dell' inverſa de' denominatori.

23. Laſcio all' induſtria di chi vuole ben apprendere la teoria delle proporzioni il dedurre dalle coſe premeſſe varj altri teoremi, per mezzo delle traſformazioni; ne accenno alcuni.

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſarà $ad=bc$; E 1.° Se $b=c$, ſarà $ad=b^2=c^2$;

cioè in tre termini continuamente proporzionali, il prodotto degli

gli estremi, è eguale al quadrato del medio; e conseguentemente se in tre quantità a, b, d il prodotto ad delle estreme sia eguale al quadrato b^2 di quello di mezzo; quelle tre quantità sono in continua proporzione geometrica.

2.° Estraendo la radice quadrata da amendue i membri di quest' ultima equazione $ad = b^2$, si ha $b = \sqrt{ad}$; cioè il termine di mezzo d'una proporzione continua, è eguale alla radice quadrata del prodotto de' due estremi.

3.° Se a, d fossero due quadrati come f^2, g^2, il prodotto fg delle loro radici quadrate sarebbe medio proporzionale tra a, d; essendo $f^2 : fg :: fg : g^2$.

4.° Dividendo l'equazione $c^2 = ad$ per a, e per d; si ha $\frac{c^2}{a} = d$, $\frac{c^2}{d} = a$; cioè qualunque de' due estremi d'una proporzione continua è eguale al quadrato del termine di mezzo diviso per l'altro estremo.

5.° Dividendo allo stesso modo l'equazione $ad = bc$, primo per d, poi per c, indi per b, e finalmente per a, si ha

$$a = \frac{bc}{d} \;\ldots\; c = \frac{ad}{b}$$

$$b = \frac{ad}{c} \;\ldots\; d = \frac{bc}{a}$$

cioè qualunque termine d'una proporzione è eguale al prodotto de' termini non analogi, diviso per il suo analogo.

6.° Quindi si sciolgono i quattro problemi seguenti. Dati due termini qualunque d'una proporzione continua trovare il terzo. Dati tre termini qualunque d'una proporzione discreta trovare il quarto: Trovare una media proporzionale tra due date quantità: Trovare un quadrato eguale al prodotto di due date quantità.

Pro-

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte.

24. DAte $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$.

Dim. Si divida ad, bc per la stessa quantità bd; farà $\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}::\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$.

25. Se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$; farà (multiplicando le due ragioni per bd) $ad>bc$; e se $ad>bc$, dividendo tutto per bd, farà $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

26. Se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$; sia $\frac{a}{b+x}=\frac{c}{d}$; farà $\frac{b+x}{a}=\frac{d}{c}$; cioè $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$; *invertendo*.

27. Se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b}+1>\frac{c}{d}+1$; cioè $\frac{a+b}{b}>\frac{c+d}{d}$; *componendo*.

28. Se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b}-1>\frac{c}{d}-1$; cioè $\frac{a-b}{b}>\frac{c-d}{d}$; *dividendo*.

29. Se $\frac{a}{b}>\frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c}>\frac{e}{f}$, farà $\frac{a}{d}>\frac{b}{e}$, e $\frac{b}{e}>\frac{c}{f}$; cioè $\frac{a}{d}>\frac{c}{f}$; *ordinando*.

 30. Se

30. Se $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c} > \frac{d}{e}$, ſarà $af > be$, e $be > cd$; cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; *perturbando*.

31. Se $a > c$; $b > d$, ed $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ſarà $ad > bc$, ed $(ad \pm ab) > (bc \pm ab$; d'onde $\frac{a}{b} > \frac{c \pm a}{d \pm b}$.

32. Se $a + b : c + d :: a : c$, ed $a + b$ la maſſima, ſarà ......; $a + b : c + d :: a : c :: b : d$; d'onde $b > d$, ed $(a + b + c) > (c + d + a)$.

33. Da queſti modi d'argomentare ſulle ineguali ragioni ſe ne poſſono dedurre altri aſſai, come nell' articolo precedente: Si poteva mettere il primo teorema di queſt' articolo per teorema fondamentale di tutte le proporzioni: Se $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$; fatto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſarà $ad = bc$; quindi ſi ha un nuovo metodo per formare una proporzione da' membri d'un' equazione; ſe $ad = bc$, ſarà $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$; ſe $a^2 d = b^2 c$, ſarà $\frac{a^2}{b^2} : \frac{c}{d} :: a^2 d : b^2 c$; ſe......, quindi finalmente ſi ha un' altra, e più diretta dimoſtrazione dell' ultima propoſizione eſpoſta al num. 22. per le frazioni.

Proprietà particolari delle ragioni geometriche compoſte.

34. Essendo $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$; ſi ha generalmente, che due prodotti ſono tra ſe in ragione compoſta delle ragioni, che hanno i fat-

i fattori d'un prodotto ai fattori omologi dell' altro.

35. In qualunque numero di quantità $a, b, c, d, e, f \ldots$ ec., si ha $\frac{a}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$, e generalmente, in qualunque serie di quantità la ragione della prima all'ultima è composta delle ragioni delle intermedie.

36. Date a, b; sarà $a^{\frac{m}{n}}$ a $b^{\frac{m}{n}}$ in ragione $\frac{m}{n}$ plicata di $a:b$.

Se $n = 1$, ed m sia successivamente 2; 3; 4; ... ec. sarà $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, cioè i quadrati a^2, b^2 sono in ragione dupplicata delle sue radici; così $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; cioè i cubi a^3, b^3 sono in ragione triplicata delle sue radici... ec. Se $m = 1$, ed n sia successivamente 2; 3; 4; ... ec., sarà $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{b} \ldots$ ec. cioè le radici sono in ragione sudduplicata, suttriplicata.... de' loro quadrati, cubi ... ec. Se m, n sieno amendue, numeri maggiori dell'unità, fatto $m = 3$, ed $n = 2$, $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ saranno in ragione sesquiplicata di $\frac{a}{b}$, o in ragione sudduplicata di $\frac{a^3}{b^3} \ldots$ ec.

37. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

Dim. $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ di $\frac{a}{b}$, o del ſuo eguale $\frac{c}{d}$; ma $\frac{c}{d}$ è in ragione ſu $n^{plicata}$ di $\frac{c^n}{d^n}$; dunque $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ della ſu $n^{plicata}$ di $\frac{c^n}{d^n}$; ed eſſendo la ragione $n^{plicata}$ della ſu $n^{plicata}$ la ſteſſa ragione d'egualianza, ſarà $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

38. Date a, b, ſi ha

1.° $a^2 : a\ b :: a\ b : b^2$

2.° $a^3 : a^2\ b :: a^2\ b : a\ b^2 :: a\ b^2 : b^3$

3.° $a^4 : a^3\ b :: a^3\ b : a^2\ b^2 :: a^2\ b^2 : a^2\ b^3 :: a^2\ b^3 : b^4$.

4.° ... ec.

La dimoſtrazione è manifeſta, eſſendo, a cagion d'eſempio, nella ſeconda propoſizione

$$\left.\begin{matrix} a^3 : a^2\ b \\ a^2\ b : a\ b^2 \\ a\ b^2 : b^3 \end{matrix}\right\} :: a : b.$$

39. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſarà $\frac{a\,c}{b\,c} = \frac{b\,c}{b\,d}$.

Dim. Dalla data analogia, ſi ha

$$\left.\begin{matrix} \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a}{b} \\ \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{c}{d} \end{matrix}\right\}; \text{ dunque } \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{b\,c}{b\,d}.$$

40. Se

40. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, sarà (multiplicando insieme le due date equazioni) $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$.

	I.	II.
41. Se	$a:b::c:d$	$a:b::c:d$
	$b:e::g:f$	$e:f::g:c$
	$e:i::h:k$	$h:i::k:g$
	$i:l::m:n$	$m:n::l:k$
	... ec.	... ec.
	III.	IV.
	$a:b::c:d$	$a:b::c:d$
	$c:e::g:h$	$e:d::f:g$
	$g:i::k:l$	$h:g::i:l$
	$k:f::m:n$	$m:l::n:k$
	... ec.	... ec.

Sarà dalla I.ª $a:l::cghm:dfkn$
dalla II.ª $aehm:bfin::l:d$
dalla III.ª $a:beif::m:dhln$
dalla IV.ª $achm:b::cfin:k$

Tutto è evidente; essendo, per esempio, nella prima serie $\frac{abei}{beil}=\frac{cghm}{dfkn}$; e riducendo a minimi termini la prima frazione, si ha $\frac{a}{l}=\frac{cghm}{dfkn}$. Cioè in generale ne' termini delle Analogíe formate dalla multiplicazione de' termini omologi di più Analogìe date, si potrà tante volte ommettere qualche termine delle Analogìe componenti, quante egli serve d'antecedente, e di conseguente nelle prime loro ragioni, o d'antecedente, e di conseguente nelle seconde ragioni, o di antecedente, o di conseguente in amendue... ec.

42. I

42. I due teoremi de' num. 34. 35. appartengono alle ragioni composte di ragioni qualunque; gli altri, che seguono, appartengono alle ragioni composte di ragioni eguali. Infiniti sono i problemi, che col mezzo degli esposti teoremi si sciolgono per le ragioni composte d'amendue i generi. Sono troppo manifesti que', che risguardano le ragioni composte di ragioni eguali, come sarebbe; trovare una ragione dupplicata, triplicata, $n^{plicata}$ d'una data ragione; trovare una ragione suddupplicata, suttriplicata, su $n^{plicata}$ d'una data ragione... ec. Si noti principalmente la proposizione del num. 38. Serve essa per conoscere il numero de' medj razionali, che si possono inserire tralle potenze qualunque di due quantità; anzi con quelle formole restano questi agevolmente determinati. Tra' quadrati di a, b, si può inserire un solo medio continuamente proporzionale, ed è ab; tra i cubi di a, b se ne possono inserire due, e sono $a^2 b$, ab^2; tra... ec. E' facile il vedere, che le proposte formole, e le altre, che verrebber dopo non sono, che i termini delle potenze del binomio $a+b$, ommessi i segni, che gli congiungono, ed i coefficienti di ciascun termine (Tav. II.ª). La potenza quarta di $a+b$ è $a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$; ommettendo i segni, ed i coefficienti, si ha a^4, $a^3 b$, $a^2 b^2$, ab^3, b^4; cioè tra a^4, e b^4 si possono inserire tre medj proporzionali, e sono $a^3 b$, $a^2 b^2$, ab^3; e tralle potenze m di a, b si può inserire un numero $m-1$ de' medj proporzionali, ed il termine $(n-1)^{esimo}$ della formola di qualche potenza di $a+b$ spogliato del segno, e del coefficiente, è l'n^{esimo} de' medj, che si possono inserire tra a^{m-1}, e b^{m-1}. Qui si parla sempre de' medj proporzionali, che sono razionali; parlando assolutamente, tra due quantità, qualunque esse sieno, si possono inserire infiniti medj proporzionali, come vedremo. Quanto ai primi due teoremi sulle ragioni composte di ragioni qualunque, basti, per vederne la fecondità, la soluzione de' seguenti cinque problemi.

43. Data

43. Data qualunque ragione $\frac{a}{f}$, formarne una ragione comunque composta, ed eguale alla data.

Tra a, f si concepisca qualunque numero d'intermedie b, c, d, e; si avrà $\frac{a}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$ (num. 35.)

44. Dato qualunque numero di ragioni componenti, formarne una ragione composta.

E' manifesto che il prodotto delle date componenti sarà la ragione cercata: Ma avvi un altro metodo più elegante, e più utile in tutto il calcolo, e nella geometria:

1.° Se sien due le ragioni date $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si faccia $a:b::d:\frac{bd}{a} = p$; sarà $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$.

2.° Se sieno date tre ragioni componenti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; componendo le prime due $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$, e sarà ridotto il problema a cercare la ragione composta di $\frac{c}{p}$, $\frac{e}{f}$.

3.° Se vi sia qualunque numero A di date ragioni, si cerchi la ragione composta delle prime due; sostituita questa in A si avrà una nuova serie B di ragioni, che conterrà una ragione meno di A, e collo stesso metodo si cambierà la serie B in C, e C in D; fino ad avere una sola ragione, che sarà la composta delle date A.

45. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, e tutte le ragioni componenti meno una, trovare questa ragione incognita.

E'

E' evidente, che dividendo la composta ragione $\frac{a}{f}$ per il prodotto A delle date ragioni componenti, il quoto B sarà la ragione cercata.

Altro metodo. 1.° Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di due ragioni, una delle quali sia $\frac{c}{d}$, si faccia $c:d::a:\frac{ad}{c}=p$; sarà $\frac{p}{f}$ l'altra ragione componente; oppure $d:c::f:\frac{cf}{d}=q$, sarà $\frac{a}{q}$ la ragione cercata.

2.° Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di tre ragioni, due delle quali siano date; si faccia $\frac{p}{q}$ composta delle due date, e quindi $p:q::a:\frac{aq}{p}=r$, oppure $q:p::f:\frac{pf}{q}=s$, sarà $\frac{r}{f}$, o $\frac{a}{s}$ la ragione cercata.

3.° Ed in generale; qualunque sia il numero delle ragioni componenti, si chiami A la ragione composta delle date, e B la ragione, che si cerca; si farà sempre nel caso, in cui data la composta AB, ed una delle componenti A, si cerca B.

46. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, ed una delle componenti A, trovare la ragione B composta delle altre.

E' chiaro, che B comunque composta, è una delle componenti di $\frac{a}{f}$; e che perciò si riduce il presente problema al precedente.

47. Variare all' infinito la più semplice espressione d'una ragione comunque composta.

1.° Si può prendere qualunque antecedente delle ragioni componenti per antecedente della ragione equivalente alla data.

Se

Se sien date $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h}$, e si voglia a per antecedente della ragione composta, si faccia $c:d::b:\frac{bd}{c}=p$, ed $e:f::p:\frac{fp}{e}=q$, indi $g:h::q:\frac{qh}{g}=r$; sarà $\frac{a}{r}$ la ragione equivalente alla data.

2.° Si può prendere per conseguente della ragione composta qualunque conseguente b delle ragioni, che compongono la data, e facendo $d:c::a:\frac{ac}{d}=p$; ed $f:e::p:\frac{ep}{f}=q$, e finalmente $h:g::q:\frac{gq}{h}=r$, sarà $\frac{r}{b}$ la ragione cercata.

3.° Si può prendere qualunque quantità n per antecedente, o per conseguente della cercata; si avrà $a:b::n:\frac{bn}{a}=p$; e $c:d::p:\frac{dp}{c}=q$, indi $e:f::q:\frac{fq}{e}=r$; e finalmente $g:h::r:\frac{hr}{g}=s$, ed $\frac{n}{s}$ sarà la ragione cercata.

Delle ragioni, e proporzioni aritmetiche.

48. Oltre il modo di paragonare una quantità all'altra dello stesso genere per mezzo della divisione, ve n'ha un altro, che si fa colla sottrazione; quando si cerca la ragione di contenenza d'una quantità in un'altra, quella ragione, come detto è, si chiama ragione geometrica, e quando si cerca la ragione di differenza d'una all'altra quantità, quella ragione si chiama *ragione aritmetica:* e siccome la proporzione geometrica è un'ugualianza di due ragioni geometriche, così la *proporzione aritmetica* è un'ugualianza di due ragioni aritmetiche; onde in amendue le proporzioni si può usare lo stesso

segno

segno per separare una ragione dall' altra. Per essere più uniformi ne' segni, che separano i termini della ragione aritmetica, pare, che si dovrebbe usare nelle aritmetiche ragioni il segno della sottrazione, siccome nelle geometriche si usa quello della divisione; ma è più in uso il separargli con un sol punto, cui dalla natura delle quistioni s'intenderà non essere segno di multiplicazione; finalmente, è chiaro, che la ragione, e la proporzione aritmetica così disegnata, si potrà leggere come la geometrica, col noto *sta*, *come*.... Ciò basta per far comprendere cosa sia antecedente, conseguente, termine omologo, analogo.... d'una ragione, o proporzione aritmetica.

49. Per le ragioni aritmetiche, si noti. 1.° Che anche in esse si possono considerare le ragioni composte; Si può dire, a cagione d'esempio, che la ragione aritmetica di 15 a 9, è composta delle tre ragioni di 15 a 12, di 6 a 4, e di 10 a 9. 2.° Che nelle ragioni aritmetiche si possono considerare le ragioni doppie, triple...., appunto come nelle geometriche si considerano le dupplicate, triplicate...La ragione geometrica di 8 a 2 è dupplicata della ragione geometrica di 8 a 4, e del pari la ragione aritmetica di 8 a 2 è doppia della ragione aritmetica di 8 a 5.

50. Per le proporzioni aritmetiche. La proposizione fondamentale si è, che se $a.b=c.d$, sarà $a+d=b+c$; e se $a+d=b+c$, sarà $a.b=c.d$; cioè, che in quattro termini aritmeticamente proporzionali la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, e se in quattro termini la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, que' quattro termini sono aritmeticamente proporzionali. Tutto è evidente; avendosi dalla deffinizione, che se $a.b=c.d$, sarà $a-b=c-d$, e trasponendo il b, ed il d, sarà $a+d=b+c$; e se $a+d=b+c$, trasponendo il b, ed il d, sarà $a-b=c-d$, donde $a.b=c.d$.

51. Quindi nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo; e se in tre ter-

termini, la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo, que' tre termini sono in aritmetica proporzione continua. Ciò è evidente dalla dimostrazione precedente, e dalla trasformazione della precedente equazione; Si faccia $b = c$, sarà $a + d = 2b = 2c$, e se $a + d = 2c$, sarà $a - c = c - d$, cioè $a . c = c . d$.

52. Si noti sulle proporzioni aritmetiche, che si possono in esse usare que' modi d'argomentare, che si sono esposti al n. 13. per le proporzioni geometriche. Se $a . b = c . d$, sarà alternando $a . c = b . d$... ec. Allo stesso modo si possono applicare alle ragioni aritmetiche ineguali la proprietà delle ineguali ragioni geometriche, o semplici, o composte.

53. Quindi si ha la soluzione di tutti i problemi, che dipendono dalle proporzioni aritmetiche. Dati tre termini d'una proporzione aritmetica discreta, trovare il quarto; dati due termini d'una proporzione aritmetica continua, trovare il terzo ...., ec. Nella proporzione discreta, la somma de' termini non analoghi meno il dato termine analogo al cercato è eguale al termine cercato; nella proporzione continua la metà della somma de' termini estremi è eguale al termine di mezzo; il doppio del termine di mezzo meno uno degli estremi è eguale all'altro estremo..., ec.

Delle proporzioni armoniche, e contro-armoniche.

54. SE tre date quantità, o piuttosto numeri, a, b, c siano così disposte, che la prima stia alla terza, geometricamente come la differenza tralla prima, e la seconda, sta alla differenza tralla seconda, e la terza, ossia, che $a : c :: a - b : b - c$, quelle tre quantità sono in proporzione *armonica continua*. Se quattro quantità a, b, c, d siano tali, che $a : d :: a - b : c - d$, quelle quattro quantità sono in proporzione *armonica discreta*. Se tre quantità a, b, c sieno tali, che $c : a :: a -$

 $b :$

$b:b-c$, o se quattro quantità a, b, c, d sieno tali, che $d:a::a-b:c-d$, quelle quantità sono in proporzione *contro-armonica*, o continua, o discreta.

55. L'uso principale di queste analogie, è di trovare uno de' termini della proporzione armonica, o contro-armonica, di cui siano dati gli altri. Multiplicando gli estremi, ed i medj di ciascuna delle quattro precedenti analogie, e liberando coi metodi noti ciascuna lettera, si ha

1.° Per le proporzioni armoniche continue

$$a=\frac{bc}{2c-b}$$

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

$$c=\frac{ab}{2a-b}$$

2.° Per le proporzioni armoniche discrete

$$a=\frac{bd}{2d-c}$$

$$b=\frac{(2d-c)a}{d}$$

$$c=\frac{(2a-b)d}{a}$$

$$d=\frac{ac}{2a-b}$$

3.° Per le proporzioni contro-armoniche continue

$$a=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(b-c)c+\frac{1}{4}b^2}$$

$$b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$$

$$c=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(b-a)a+\frac{1}{4}b^2}$$

4.° Per

4.° Per le proporzioni contro-armoniche difcrete

$$a = \frac{1}{2} b + \sqrt{(c-d)\,d + \frac{1}{4} b^2}$$

$$b = \frac{(d-c)\,c}{a} - a$$

$$c = \frac{(a-b)\,a}{d} + d$$

$$d = \frac{1}{2} c \pm \sqrt{(b-a)\,a + \frac{1}{4} c^2}$$

56. Paragonando ciafcun valore de' termini d'una proporzione armonica, o contro-armonica, col valore de' termini d'una proporzione aritmetica, fi fcopriranno molte eleganti proprietà comuni a quefti due generi di proporzioni. A cagione d'efempio, per le proporzioni armoniche continue. 1.° Se a, b, c fiano in proporzione aritmetica continua, faranno ab, ac, bc in continua proporzione armonica; dacchè, fe $a . b = b . c$, farà $a + c = 2b$, e multiplicando queft' equazione per abc, fi ha $a^2 bc + abc^2 = 2ab^2 c$, offia $a^2 bc - ab^2 c = ab^2 c - abc^2$; cioè $ab(ac - bc) = bc(ab - ac)$; donde $ab : bc :: ab - ac : ac - bc$. 2.° Se fi divida una fteffa quantità per altre quantità, che fiano in continua proporzione armonica, i quozienti faranno in continua proporzione aritmetica; dacchè, fe a, b, c fono in continua proporzione armonica, farà $b = \frac{2ac}{a+c}$; dunque dividendo qualunque quantità d per a, b, c, offia per a, $\frac{2ac}{a+c}$, c, fi avrà $\frac{d}{a}$, $\frac{ad+dc}{2ac}$, $\frac{d}{c}$, e $2\frac{(ad+dc)}{2ac} = \frac{d}{a} + \frac{d}{c}$.
3.° Allo fteffo modo fi dimoftra, che dividendo una quantità per altre, che fiano in continua proporzione aritmetica, i quozienti faranno in continua proporzione armonica, donde fi ricava

cava, che invertendo i termini di una delle proporzioni armonica, ed aritmetica, col formare frazioni, che abbiano l'unità per numeratore, ed i detti termini per denominatore, l'una si trasforma nell' altra.

CAPO SECONDO.

Delle progreſſioni Geometriche, ed Aritmetiche.

Progreſſioni Geometriche.

57. *Progreſſione geometrica*, ſignifica una ſerie di termini in continua proporzione geometrica; ſi nota all' iſteſſo modo, come la proporzione continua, oppure col ſegno ∺ meſſole verſo la ſiniſtra, con un punto di ſeparazione d'un termine dall' altro. Già ſi vede, che ciaſcun termine della progreſſione geometrica fuori del primo, è conſeguente, e che ciaſcuno, fuori dell' ultimo, è antecedente, e che chiamando s la ſomma di tutti i termini, b il primo, t l'ultimo termine; Sarà $s-b$ la ſomma di tutti i conſeguenti, ed $s-t$ la ſomma di tutti gli antecedenti termini della progreſſione. Conviene diſtinguere la progreſſione geometrica *aſcendente*, dalla *deſcendente;* in quella i termini vanno ſucceſſivamente creſcendo da ſiniſtra a deſtra, ed in queſta vanno ſempre ſcemando; nella prima ſi chiama *ragion comune* della progreſſione l'eſponente della ragione d'un termine qualunque diviſo per quello, che lo precede verſo la ſiniſtra; la *ragion comune* della ſeconda progreſſione, è l'eſponente della ragione d'un termine qualunque diviſo, per quello, che gli vien dopo verſo la deſtra. Noi parleremo ſolamente della progreſſione aſcendente, eſſendo facile l'applicare le proprietà di queſta progreſſione alla deſcendente, o col roveſciar tutti i termini della progreſſione, o col cambiare alcuni ſegni nelle formole, che anderemo eſponendo.

58. Prima propoſizione fondamentale. Se a è la ragione comune della progreſſione, ed m il numero, che eſprime il ſito, che occupa nella progreſſione un certo termine t, o (che è lo

ſteſſo)

ſteſſo) ſe m eſprime il numero de' termini della progreſſione, ſarà $t = b\,a^{m-1}$.

Dim. Nella progreſſione $\div b.c.d.e\ldots\ldots t$, ſi ha $\frac{c}{b} = a$, cioè $c = a\,b$; ed eſſendo $b:c::c:d$, oſſia $b:ab::ab:d$, ſarà $d = a^2\,b$; così pure dall' analogia $c:d::d:e$, oſſia $ab:a^2\,b::a^2\,b:e$, ſarà $e = a^3\,b$; e così nel reſto; diſponendo in ordine i valori di ciaſcun termine, ſi ha

il ſecondo.... $c = b\,a^1$
il terzo....... $d = b\,a^2$
il quarto...... $e = b\,a^3$
il $m^{eſimo}$....... $t = b\,a^{m-1}$.

59. Seconda propoſizione fondamentale. In qualunque progreſſione geometrica la ſomma degli antecedenti ſta alla ſomma de' conſeguenti, come qualunque antecedente b' ſta al ſuo conſeguente c'; cioè $s-t : s-b :: b' : c'$.

Dim. Per la natura della progreſſione, ſi ha $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots$ ec.; dunque (num. 18.) $\frac{b+c+d+\ldots \text{ ec.}}{c+d+e+\ldots \text{ ec.}} = \frac{d}{e} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots \frac{b'}{c'}$.

60. Dalla prima propoſizione fondamentale ſi hanno le ſeguenti ſei propoſizioni. 1.ª Dato il primo termine b, e la ragione comune a d'una progreſſione geometrica, ſi poſſono trovare tutti gli altri, o qualunque degli altri termini della medeſima.

La formola $t = b\,a^{m-1}$, rappreſenta ciaſcun termine $m^{eſimo}$ della progreſſione; onde ſe ſi voglia in particolare un termine d'una tale determinata claſſe, o ſito, ſi faccia m eguale al numero, che lo indica; ſe ſi vogliano ſucceſſivamente tutti i termini della progreſſione, ſi faccia ſucceſſivamente m eguale ad 1. 2. 3. 4... ec.

61. 2.ª propoſizione. Qualunque progreſſione geometrica, che

che incomincia da b, ed ha a per ragione comune, è rappresentabile per $\div\div b . ba . ba^2 . ba^3 \dots$ ec.

62. 3.ª Dato il primo termine b, l'ultimo t, e la ragione comune a, si ha il numero m de' termini inclusivamente l'ultimo; e dato il primo termine b, l'ultimo termine t, ed il numero de' termini m, si ha la ragione comune a.

Dacchè 1.º si multiplichi per $\frac{a}{b}$ ciascun membro dell'equazione $t = ba^{m-1}$; si ha $\frac{ta}{b} = a^m$: Si alzi a alla potenza prima, seconda, terza..... fino ad avere un numero eguale a $\frac{ta}{b}$; l'esponente di questa potenza sarà il valore di m.

2.º Si divida l'equazione medesima per b; si ha $\frac{t}{b} = a^{m-1}$, ed estraendo la radice $m-1$, si ha $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}$.

63. 4.ª Se r è il numero de' termini interposti tra due qualunque dati termini d'una progressione geometrica, il termine maggiore, sta al minore in ragione $(r+1^{plicata})$ della ragione comune.

Così $\frac{ba^2}{b} = a^2$; $\frac{ba^3}{b} = a^3$ .... ec., cioè, se tra i due termini dati se ne è ommesso uno, il maggiore sta al minore in ragione dupplicata di a; se se ne sono ommessi due, il maggiore sta al minore in ragione triplicata.... ec.; dacchè ciascuna di queste ragioni è composta d'un numero $r+1$ di eguali ragioni intermedie.

64. 5.ª Se ba^s, ba^r siano termini della progressione geometrica, distanti l'uno dall'altro $r-s$, e ba^p, ba^{p+1} siano due altri termini qualunque tra se vicini, sarà $ba^r : ba^s :: b^{r-s} a^{p(r-s)} : b^{r-s} a^{(p+1)(r-s)}$.

Dac-

Dacchè l'esponente delle due ragioni è sempre a^{r-r}. Così, per esempio, il primo termine d'una progressione geometrica sta al terzo, come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo termine; il primo termine sta al quarto, come il cubo del primo sta al cubo del secondo; il terzo sta al nono, come la sesta potenza di qualunque antecedente, sta alla sesta potenza del suo conseguente.... ec.

65. 6.ª Tra due quantità b, t trovare un numero r di medj geometricamente proporzionali.

E' evidente, che se si troverà il primo de' cercati medj proporzionali, si troveranno, per il num. 58., tutti gli altri: Sia adunque x il primo de' medj cercati; Sarà per il num. precedente $t : b :: x^{r+1} : b^{r+1}$; dunque 1.º $t b^{r+1} = b x^{r+1}$

$$2.^{\circ}\ t b^{r} = x^{r+1}$$

$$3.^{\circ}\ \sqrt[r+1]{t b^{r}} = x$$

66. Dalla seconda proposizione fondamentale si ha; 1.º, dividendo, $c' - b' : b' :: t - b : s - t$; cioè in una progressione geometrica qualunque termine meno il precedente sta al precedente, come l'ultimo meno il primo sta alla somma di quegli, che precedon l'ultimo.

67. 2.º E se $c' = n b'$, sarà $n b' - b' : b' :: t - b : s - t$; cioè $(n-1) b' : b' :: t - b : s - t$; donde $t - b = \frac{(n-1) b' (s-t)}{b'}$ $= (n-1)(s-t)$; cioè, se in una progressione geometrica il secondo termine sia n^{plo} del primo (o come altri dicono più acconciamente, se regni nella progressione la ragione n^{pla}); la differenza de' termini estremi sarà $(n-1)^{pla}$ della somma de' termini, che precedon l'ultimo.

68. 3.º Dati il primo, e l'ultimo termine, con due altri termini qualunque tra se vicini; oppure, data la ragion comune,

ne, ed il primo, e l'ultimo termine; o dato il numero de' termini, il primo termine, e la ragion comune d'una progressione geometrica; o finalmente dato il primo, e l'ultimo termine, ed il numero de' termini; si ha la somma di tutti i termini; cioè

$$1.^{\circ}\quad s=\frac{c't-b'b}{c'-b'}$$

$$2.^{\circ}\quad s=\frac{at-b}{a-1}$$

$$3.^{\circ}\quad s=b\,\frac{a^{m}-1}{a-1}$$

$$4.^{\circ}\quad s=\frac{t^{\frac{m}{m-1}}-b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}}-b^{\frac{1}{m-1}}}$$

Dacchè 1.° multiplicando gli estremi, ed i medj dell' analogia, si ha $s(c'-b)=c't-b'b$, donde $s=\frac{c't-b'b}{c'-b'}$.

2.° Se b', c' fossero i primi due termini b, c della progressione, cioè fossero b, ba, sarebbe $s=\frac{bat-b^{2}}{ba-b}=\frac{at-b}{a-1}$.

3.° Sostituendo invece di t il suo valore $b\,a^{m-1}$, sarebbe

$$s=\frac{b\,a^{m-1}\,a-b}{a-1}=b\,\frac{a^{m}-1}{a-1}.$$

Finalmente 4.° per essere $a=\sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}=\frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

Si ha $a - 1 = \frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}} - 1 = \frac{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

$$a^m = \frac{t^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

$$a^m - 1 = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

donde $s = b\frac{a^m - 1}{a - 1} = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$

69. 4.° Dividendo l'equazione $s = b\frac{a^m - 1}{a - 1}$ per $\frac{a^m - 1}{a - 1}$, ſi ha $b = s\frac{a - 1}{a^m - 1}$, cioè, data la ſomma, il numero de' termini, e la ragion comune, ſi ha il primo termine della progreſſione.

70. 5.° Soſtituendo nella formola $t = ba^{m-1}$, queſto valore di b, ſi ha l'eſpreſſione generale di qualunque termine, data la ſomma, il numero de' termini, e la ragion comune, cioè $t = s\frac{a^m - a^{m-1}}{a^m - 1}$.

71. 6.° Si può avere la ragion comune della progreſſione, data la ſomma degli antecedenti, e de' conſeguenti; dacchè $b : ba :: s - t : s - b$, donde $bs - b^2 = bas - bat$, oſſia $s - b = as - at = a(s - t)$; cioè $a = \frac{s - b}{s - t}$.

72. Le

72. Le premesse due proposizioni fondamentali, ed i corollarj da esse dedotti sono fecondissimi d'altre proposizioni, che ciascuno, confrontando ciascuna formola con tutte le altre, potrà da se dedurre senza pena. Si ha a cagione d'esempio

$$b = s + at - as = s + (t - s) a$$

$$t = \frac{as + b - s}{a} = \frac{(a - 1) s + b}{a}$$

e dal num. 65. si può compire una progressione geometrica, di cui non sia dato, che il primo, ed un altro termine qualunque, col numero de' termini intermedj; basta fare r eguale al numero degli intermedj, e si avrà x secondo termine della progressione; e fatto $m = r + 2, \ldots$ sideterminerà successivamente la formola $t = b a^{m-1}$.

Delle progressioni Aritmetiche.

73. *Progressione aritmetica*, significa una serie di termini in continua proporzione aritmetica: Si nota allo stesso modo come la proporzione aritmetica, o col segno $\div$ messole verso la sinistra, ed un punto di separazione tra un termine, e l'altro. Anche la progressione aritmetica può essere ascendente, o discendente; tratterò solo dell' ascendente. Nell' articolo precedente mi sono steso più forse del bisogno a svolgere con parole le formole algebraiche, che danno le dimostrazioni de' teoremi, e le soluzioni de' problemi sulle progressioni geometriche; ho giudicato di doverlo fare, per avvezzare il lettore anche in questa materia delle progressioni a penetrare lo stato, e le condizioni della quistione col solo contemplare attentamente le formole: Non sarà uopo di tanto in quest' articolo, nel quale ciascuno potrà dedurre (come detto è per le progressioni geometriche) delle nuove formole, che qui ommetto per essere, o troppo facili, o meno necessarie.

74. Pro-

74. Proposizione fondamentale. Se b è il primo termine, a la differenza, o la ragione comune, m il numero, che esprime il sito d'un termine qualunque, o il numero de' termini della progressione, fino ad esso inclusivamente, sarà $t = b + (m - 1) a$.
Dim. Nella progressione aritmetica $\div b . c . d . e . f \ldots . t$; si ha $c - b = a$, cioè $c = b + a$, ed essendo $b . c = c . d$, ossia $b . b + a = b + a . d$, sarà $d = b + 2a$.. ec.;
cioè il primo termine essendo b

il secondo è $b + a$
il terzo è $b + 2a$
il m^{esimo} è $b + (m - 1) a$

75. Seconda proposizione fondamentale. Se t è l'ultimo termine, ed s la somma di tutti i termini della progressione aritmetica, sarà 1.° $t - b = ma - a$
2.° $2s = mb + mt$

La prima formola è evidente, trasponendo il b della formola del num. 74., la seconda si dimostra così: Nella progressione aritmetica $\div b . c . d . e . k . t$, per la deffinizione si ha $b . c = k . t$,
$b . d = e . t$

dunque $b + t = c + k$
$b + t = d + e$; cioè $2 (b + t) = (c + k) + (d + e)$,
e $3 (b + t) = s$, donde $6 (b + t) = 2s$; ma 6 è il numero m de' termini della progressione, dunque $m (b + t) = 2s$.

76. Dalla formola del num. 74.; 1.° Dato il primo termine b della progressione aritmetica, e la differenza comune a, si possono trovare successivamente tutti gli altri termini, o qualunque termine della progressione.
Si faccia nella formola di t, la lettera m eguale all' esponente del sito, che deve occupare il termine cercato; o se si vogliano successivamente tutti gli altri termini della progressione dopo b, si faccia m successivamente eguale a 2 . 3 . 4 . 5 ... ec.

77. 2.° Qualunque progressione aritmetica, che incomincia da

da b, ed ha a per differenza comune, si può rappresentare da ÷ $b \, . \, b+a \, . \, b+2a \, . \, b+3a \, ...$ ec.

78. 3.° Tra due dati termini t, b trovare un numero r di medj t aritmeticamente proporzionali.

Si divida la differenza $t-b$ per $r+1$; il quoziente sarà l'a della progressione, con cui, per il num. 74., si troveranno tutti i termini della medesima. Dacchè se si cerca un numero r di termini intermedj, compiuta che sia la progressione, si dovranno avere $r+1$ differenze, e tutte tra se eguali, la cui somma deve equivalere a $t-b$; dunque ciascuna di queste sarà $\frac{t-b}{r+1}$.

79. Colle formole del num. 75. si sciolgono tutti i problemi, che appartengono alle progressioni aritmetiche. In ciascuna di quelle formole si contengono quattro lettere; liberando adunque co' noti metodi ciascuna di queste, si avrà il suo valore, colle altre tre; cioè in tutto si avranno otto formole per gli m, a, b, t, s. Sostituendo nella seconda formola il valore di t, di a, e di m presi dalla prima, si avranno tre altre formole di quattro lettere per ciascuna, da ciascuna di queste si dedurranno, come prima, quattro nuove formole, cioè in tutto dodici formole, che colle prime otto daranno venti formole, che comprendono tutti i casi possibili delle progressioni aritmetiche. Il problema generale, che comprende tutti questi venti casi è *dati i valori di tre lettere m, a, b, t, s, trovare il valore di ciascuna delle altre due.*

80. Facendo il calcolo accennato nel num. precedente, si ha

Prima formola	Seconda formola
$t-b=ma-a$	$2s=mb+mt$
I. $b=t-(m-1)a$	I. $b=\frac{2s}{m}-t$
II. $t=b+(m-1)a$	II. $t=\frac{2s}{m}-b$
III. $a=\frac{t-b}{m-1}$	III. $s=\frac{m}{2}(b+t)$
IV. $m=1+\frac{t-b}{a}$	IV. $m=\frac{2s}{b+t}$

Seconda formola,
trasformata col valore di t preso dalla prima

$$2s = 2mb + m^2 a - ma$$

I. $$b = \frac{1}{m}s - \frac{m-1}{2}a$$

II. $$a = \frac{2(s - mb)}{m \,.\, \overline{m-1}}$$

III. $$s = mb + \frac{m \,.\, \overline{m-1}\, a}{2}$$

IV. $$m = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$$

Seconda formola,
trasformata col valore di m preso dalla prima

$$2s = b + t + \frac{t^2 - b^2}{a}$$

I. $$b = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4}a)a}$$

II. $$t = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b-a)b + (2s + \frac{1}{4}a)a}$$

III. $$a = \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t}$$

IV. $$s = \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a}$$

Seconda formola,
trasformata col valore di a preso dalla prima

$$2s = 2mt - m^2 a + ma$$

I. $t = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$

II. $a = \frac{2(mt-s)}{m.\overline{m-1}}$

III. $s = mt - \frac{m.\overline{m-1}}{2}a$

IV. $m = \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$

81. Combinando insieme queste formole si trovano quattro valori per ciascuna delle cinque lettere m, a, b, t, s

I. $m = 1 + \frac{t-b}{a} = \frac{2s}{b+t}$

$= \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$

II. $a = \frac{t-b}{m-1} = 2\,\frac{s-mb}{m.\overline{m-1}}$

$= \frac{t^2-b^2}{2s-b-t} = 2\,\frac{mt-s}{m.\overline{m-1}}$

III. $b = t-(m-1)a = \frac{2s}{m} - t = \frac{1}{m}s - \frac{m-1}{2}a$

$= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4}a)a}$

$$\text{IV.}\quad t = b + (m-1)a = \frac{2s}{m} - b = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$$

$$= -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b+a)b + (2s + \frac{1}{4}a)a}$$

$$\text{V.}\quad s = \frac{m}{2}(b+t) = mb + \frac{m.\overline{m-1}}{2}a$$

$$= \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a} = mt - \frac{m.\overline{m-1}}{2}a.$$

Paragone delle due progressioni, Geometrica, ed Aritmetica.

82. PAragonando insieme le formole dedotte dalle proprietà delle proporzioni, e progressioni geometriche, ed aritmetiche, si vede 1.° Che l'addizione, e la sottrazione nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche, fanno ciò, che nelle proporzioni, e progressioni geometriche si ottiene colla multiplicazione, e colla divisione.

2.° Che nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche si fa colla multiplicazione, e colla divisione ciocchè nelle proporzioni, e progressioni geometriche si fa colla formazione, e colla risoluzione delle potenze.

3.° Che la differenza, o la ragione comune de' termini d'una proporzione, e progressione aritmetica tiene luogo della ragione comune nella geometrica.

A cagione d'esempio, per trovare l'ultimo termine t d'una progressione aritmetica, dato il primo termine b, la differenza comune a, ed il numero m de' termini, si multiplica la differenza comune a col numero de' termini $m-1$, e si aggiunge al prodotto il primo termine b; e nella progressione geometrica, si ha il t alzando alla potenza $m-1$ la ragion comune a, e multiplicando a^{m-1} per il primo termine b.

83. Tutte

83. Tutte le proprietà delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche si potevano dedurre dalla espressione de' conseguenti per mezzo degli antecedenti, e della ragione comune fatta eguale ad a; invece di $a:b::c:d$, e di $a.b::c.d$ si poteva prendere $a:ab::c:ac$, e $b.b+a::c.c+a$; o, unendo in una queste due espressioni, fare $b; b \overset{\times}{+} a::c; c \overset{\times}{+} a$. Non abbiamo scelta questa strada, che pure sembra più semplice, per dare luogo agli artificj analitici, e l'accenniamo qui per dare materia di calcolo a chi vorrà contemplare la teorìa delle proporzioni anche sotto quest' aspetto.

84. Nelle progressioni. 1.° Non s'impiegano più di due lettere diverse, b, a, varie volte a se stesse aggiunte, o multiplicate insieme; la progressione aritmetica si riduce sempre a $b.$ $b+a.b+2a.b+3a$... ec., e la geometrica a $b.ba.ba^2$ ba^3 ... ec.

2.° I coefficienti di a nella progressione aritmetica sono gli stessi, che gli esponenti di a nella geometrica, termine per termine, ed oltre a ciò formano la serie naturale 1.2.3.4... ec., o se si faccia il primo termine della progressione aritmetica eguale a $b+0a$, e della geometrica ba^0, formano la serie naturale 0.1.2.3.4... ec.

3.° Quindi dato il primo termine b, e la ragione comune a delle due progressioni, si ha un facile compendio per formarle, e continuarle all'infinito. Per la progressione aritmetica basta multiplicare la ragione, o differenza comune a successivamente per i termini della serie naturale 0.1.2.3...ec., ed a ciascun prodotto aggiungere il primo termine b. Per la progressione geometrica basta alzare a successivamente alle potenze espresse dalla serie naturale 0.1.2.3.4... ec., e multiplicare di mano in mano queste potenze per b.

4.° Nella progressione aritmetica, può supporsi b eguale a zero, non così nella geometrica; dacchè fatto $b=0$ in quella si avreb-

be tuttavia la progressione $\div$ $0 . a . 2a . 3a \ldots$ ec., ed in questa si avrebbe una serie di zeri.
5.° Nella progressione aritmetica può supporsi $a = 1$, non così nella geometrica; e nè in quella, nè in questa può a essere eguale a zero. Se $a = 1$, si ha $\div b . b + 1 . b + 2 \ldots\ldots$ ec., se $a = 0$, si ha $b . b . b \ldots$ ec., che è una serie di quantità eguali; e nelle progressioni geometriche, se $a = 1$, si ha $b . b . b \ldots$ ec., serie di quantità eguali, e se $a = 0$, si ha una serie di zeri.
6.° Quindi la progressione aritmetica può avere qualche termine eguale a zero, non così la geometrica: nella progressione aritmetica allora solamente vi sarà un termine eguale a zero, quando uno de' termini sarà multiplo della ragione comune.

85. Infinite sono le osservazioni di simil genere, che si possono fare sulle due progressioni; tra tutte però, le più interessanti s'aggirano sulla progressione geometrica, in cui si supponga $b = 1$; si ha $\div\!\div a^0 . a^1 . a^2 . a^3 \ldots\ldots$ ec., che è la serie delle potenze di a. Su questa serie si noti. 1.° Che se preso a^0 per primo termine della progressione, il secondo non fosse a^1, ma $\frac{1}{a^1} = a^{-1}$, si avrebbe $\div\!\div a^0 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3} \ldots$ ec.
2.° Che si possono ordinare queste due progressioni, di modo che ne compongano una sola; si avrà
$$\text{ec.} \ldots\ldots a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 \ldots\ldots \text{ec.}$$
3.° Che in questa nuova progressione, il termine di mezzo a^0 è il limite comune donde partono le due progressioni, una verso la destra, l'altra verso la sinistra; la ragione d'un termine qualunque al suo vicino verso la destra è $\frac{1}{a}$, e gli esponenti partendo del limite comune formano la serie de' numeri naturali, ma andando verso la destra ciascun termine di questa serie ha il segno $+$, andando verso la sinistra, hanno il segno $-$.

4.° Che

4.° Che quindi la serie, che sta alla sinistra di a^0 è inversa di quella, che vi sta a destra: il secondo termine verso la destra dopo a^0 è a^1, ed il secondo termine dopo a^0 verso la sinistra è $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$: il terzo termine... ec.

86. Quindi. 1.° Nella progressione delle potenze di a d'esponente positivo la seconda potenza di a occupa il secondo sito, o la seconda classe dopo a^0; e generalmente, la potenza m^{esima} sta alla classe $(m+1)^{esima}$, incominciando da a^0; ed essendo il termine $(m+1)^{esimo}$ d'una progressione geometrica affatto lo stesso del $(m+1)^{esimo}$ continuamente proporzionale dopo il primo, ed il secondo termine, la potenza m di a è la $(m+1)^{esima}$ continuamente proporzionale all'unità, ed al dato a. Ciò vale ancora per le potenze d'esponente negativo.

2.° Collo stesso discorso si vede, che nella serie delle potenze di a, il termine a^1, che è radice seconda di a^2, è mezzano proporzionale tra a^0, ed a^2, e che generalmente a^1, che è radice m^{esima} di a^m, è la prima delle $m-1$ proporzionali tra a^0, ed a^m; cioè, che la radice qualunque d'una potenza d'esponente positivo è la prima di tante medie proporzionali tra l'unità, e la potenza data, quante sono unità (una meno) nell' esponente della radice cercata.

87. Quindi ancora; 1.° Cercare una potenza d'intero esponente dato di una data quantità a, è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, il primo termine della quale sia l'unità, ed il secondo sia la data quantità a, e cercare il termine di questa progressione, che occupa il sito indicato dall' esponente della potenza cercata, dopo l'unità non compresa; o, a dire più corto, cercare la potenza m d'una quantità a è lo stesso, che cercare la $(m+1)^{esima}$ continuamente proporzionale ad a^0, ed a.

2.° Cercare una radice d'esponente intero d'una data potenza, è lo

è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, che incominci dall' unità, di cui sia dato un termine qualunque, ed il sito (indicato dall' esponente), che egli occupa nella medesima, e cercare il primo di tanti medj proporzionali tra l'unità, ed il dato termine, quante sono unità (meno una) nell' esponente dato; o, a dire più in breve, cercare la radice m d'una quantità a è lo stesso, che cercare il primo degli $(m-1)^{esimi}$ medj proporzionali tra a^0, ed a.

88. Quindi finalmente è manifesto, che tanto le radici delle potenze, quanto le potenze stesse d'una data radice sono termini della progressione delle potenze $\div a^0 . a^1 . a^2 . a^3 ...$ ec.; ciocchè dà una compiuta dichiarazione del chiamarsi dagli Analisti col nome di *potenze* anche le volgari radicali quantità.

89. Ciò dichiarasi viemmeglio dalla natura degli esponenti della progressione delle potenze. La diversità di due termini qualunque di questa progressione non istà, che negli esponenti diversi, da cui vengono affetti; sempre a entra ne' termini della progressione, ma sempre con nuovi, e tra se diversi esponenti, e per compire la progressione di due dati termini, o per introdurre tra due dati termini un numero m di medj proporzionali, basta cercare un numero m di medj aritmeticamente proporzionali tra gli esponenti de' medesimi, e mettergli di mano in mano per esponenti di a. Così per inserire un medio proporzionale tra a^0, ed a^2, si cerchi un medio aritmeticamente proporzionale r tra zero, e 2; si avrà $r=1$, ed a^1 sarà il medio cercato; per inserire tre medj proporzionali tra a^0, ed a^1, si cerchino tre medj aritmeticamente proporzionali tra zero, e l'unità; si avrà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ed i medj cercati daranno

$a^0 . a^{\frac{1}{4}} . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} . a^1$; e col metodo del num. 65., si avrà

$a^0 . \sqrt[4]{a} . \sqrt{a} . \sqrt[4]{a^3} . a^1$;

onde

onde $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$, $a^{\frac{2}{4}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$.

90. L'ultima, e la più insigne proprietà delle progressioni delle potenze è dedotta dalle proprietà delle progressioni aritmetiche, e geometriche, ed è, che la somma, o la differenza degli esponenti di due termini qualunque è l'esponente del prodotto, o del quoto de' medesimi, tra se multiplicati, o divisi. Questa è la proprietà principale de' *logaritmi*, che noi esporremo nel capo seguente, dopo d'avere sciolto il seguente problema.

91. Trovare la ragione, che ha la somma A d'una progressione geometrica, alla somma B d'una progressione aritmetica, posto, che amendue abbiano gl' istessi estremi b, t, e lo stesso numero di termini m.

Si riducano i due valori di A, B a non contenere, che le tre lettere b, t, m. Per la progressione aritmetica si ha (num. 81.) $B = \frac{m}{2}(b+t)$, e per la progressione geometrica si ha (num. 68.)

$$s = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$\text{e perciò } A:B :: \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}} : \frac{m}{2}(b+t) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) : m(b+t)(t^{\frac{1}{m-1}} - (b^{\frac{1}{m-1}}) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) : m(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}) + m(b\,t^{\frac{1}{m-1}} - t\,b^{\frac{1}{m-1}});$$

e fatto

e fatto $t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}} = p$, e $b t^{\frac{1}{m-1}} - t b^{\frac{1}{m-1}} = q$,

si ha $A : B :: 2p : mp + mq :: 2p : m(p+q)$

ossia, $A : B :: 2 : m + \frac{mq}{p}$.

92. Usando questo metodo non sarà necessario cercare separatamente le somme A, B per avere il loro rapporto, anzi non sarà necessario, che sia noto alcuno de' termini medj; dati i termini estremi, ed il numero de' termini si ha la ragione cercata, e finalmente trovata la ragione delle somme, e dato l'A, o il B, si ha il B, o l'A senza altri calcoli, fuori de' consueti per liberare un termine d'una data analogia.

93. E' evidente. 1.° Che crescendo t per rapporto a b, m nell' analogia superiore, cresce il p, e la seconda parte $t b^{\frac{1}{m-1}}$ di q; cioè si scema $\frac{mq}{p}$.

2.° Che crescendo il solo m, cresce $m + \frac{mq}{p}$.

3.° Che l'$m + \frac{mq}{p}$ si aumenta più col crescere di t, che col crescere di m.

4.° Quindi crescendo t, o m, si sminuisce il rapporto di A a B, o, che è lo stesso, cresce il rapporto di B ad A; ma questi rapporti sminuiscono, e crescono di più col crescere t, che coll' aumentarsi m.

94. Ciò si dichiarerebbe sempre più se prendessimo a considerare le trasformazioni della formola nel caso, in cui una delle t, b, m crescesse all' infinito per rapporto alle altre: queste considerazioni le può fare ognuno da se, essendo il calcolo delle quantità infinite affatto lo stesso del calcolo delle finite; noi

per

per a, b... ec. abbiamo ſempre inteſo d'eſprimere qualunque ſorta di quantità, o eſſe ſi ſuppongano finite, o comunque creſciute, o ſcemate all' infinito. Sulle proporzioni degli aſſolutamente infiniti, o infinitamente piccoli, o eſſi vi ſieno, o piuttoſto conducano ad aſſurdi, puoi vedere le ingegnoſe coſe, che ha ſcritte il Fontenelle (Elemens de la Geom. de l'Infini).

CAPO TERZO.

De' Logaritmi.

Natura, e proprietà de' Logaritmi.

95. TRovare l'esponente z della potenza, a cui alzando un numero qualunque a, preso ad arbitrio, si abbia un numero eguale ad un dato y.

A questo problema io riduco con Eulero (Tom. 1. c. 6. dell' introduzione all'Analisi degli infiniti) tutta la teoria de' logaritmi; l'esponente indeterminato z si chiama logaritmo del numero dato y, ed il numero assunto a si chiama *base logaritmica*. Questo problema si scioglie col metodo delle medie, e continuamente proporzionali.

96. In tanto si vede dall' equazione fondamentale $a^z = y$, che disegnando colla lettera l il logaritmo di un dato numero y, si ha 1.° $ly = z$, ed alzando ciascun membro della prima equazione alla potenza d'esponente n, e $-n$ qualunque, si ha

$$a^{nz} = y^n$$
$$a^{-nz} = y^{-n}$$
$$\text{donde } ly^n = nz$$
$$ly^{-n} = -nz$$

2.° Se $lv = x$...... sarà $a^x = v$

$ly = z$ $\qquad$ $a^z = y$, e multiplicando insieme queste due equazioni, si ha $a^{x+z} = vy$, donde $lvy = x + z = lv + ly$, e dividendo una di quelle medesime equazioni per l'altra, si ha $a^{x-z} = \frac{v}{y}$, donde $l\frac{v}{y} = x - z$,

cioè $l\frac{v}{y} = lv - ly$

3.° Fi-

3.° Finalmente, se $y=1$, sarà $a^z=1$, cioè $z=0$, e $l1=0$.

97. Quindi rappresentandosi coll' y qualunque numero, 1.° non può a essere eguale, o minore dell' unità, dacchè se esso è un' unità, non potrà mai, qualunque sia l'esponente z, aversi un numero maggiore d'un' unità, e se è una frazione, fuori del caso di $z=0$, sarà sempre a^z minore dell' unità.

2.° I logaritmi negativi sono logaritmi delle frazioni; i logaritmi positivi sono logaritmi de' numeri interi.

3.° Non si possono avere logaritmi esatti, se non quando y è una potenza perfetta di a; gli altri si hanno per approssimazione.

4.° Come si possono assegnare infiniti valori ad a maggiori dell' unità, infiniti altresì possono essere i sistemi de' logaritmi, dipendenti tutti dalle diverse supposizioni del valore di a.

5.° Quel numero, il cui logaritmo è l'unità, serve sempre di base a qualunque sistema; dacchè, se $z=1$, deve necessariamente essere $a=y$.

6.° Se quattro termini sono in proporzione geometrica, i loro logaritmi sono in proporzione aritmetica, e se una serie di termini è in progressione geometrica, i loro logaritmi sono in progressione aritmetica; dacchè i logaritmi sono esponenti delle potenze di a, o delle radici di y.

98. Da quest' ultima proprietà de' logaritmi hanno tratta alcuni Autori la deffinizione de' medesimi, dicendo, che i logaritmi sono termini d'una progressione aritmetica, che corrispondono a' termini d'una geometrica progressione. Questa nozione prende i logaritmi in una significazione più astratta, e più generale; ma per l'uso non è uopo di tanto.

99. Si considerino le formole del num. 96.. In qualunque sistema de' nostri logaritmi; 1.° $lvy=lv+ly$. Con questa formola si cambiano tutte le multiplicazioni in semplici addizioni: *Il prodotto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole alla somma de' loro logaritmi.*

 2.°

2.° $l\frac{v}{y} = lv - ly$. Con questa formola si cambiano tutte le divisioni in semplici sottrazioni: *Il quoto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dividendo sminuito del logaritmo del divisore.*

3.° $ly^{\pm n} = \pm nz$, ossia $ly^{\pm n} = \pm nly$, per essere $z = ly$. Con questa formola si cambiano le formazioni di tutte le potenze d'esponente positivo, o negativo, alle volte di numeri assai composti, in semplici multiplicazioni di numeri piccoli: *La potenza d'esponente dato di un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma multiplicato per l'esponente dato.*

4.° $ly^{\pm \frac{1}{s}} = \pm \frac{1}{s} z = \pm \frac{1}{s} ly$ Con questa formola si cambiano l'estrazioni delle radici in semplicissime divisioni: *La radice d'esponente dato d'un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma diviso per l'esponente dato.*

5.° L'uso di queste quattro formole farà comprendere varj compendj nel calcolo; a cagione d'esempio, per multiplicare un numero intero per una frazione propria, non è necessario cercare prima il logaritmo della frazione, per aggiungerlo al logaritmo del numero intero; basta sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del numeratore dato; si schiva con ciò una sottrazione, che sempre riesce più difficile dell' addizione; così per dividere un numero intero per una frazione, basta sottrarre il logaritmo del dato numeratore, dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del denominatore dato; e così nel resto.

Sarà ora facile il mettere in teoremi le altre formole sui logaritmi, che noi anderemo svolgendo in questo capo.

Metodi, e compendj di metodi per costruire le tavole de' Logaritmi.

100. DAto B per valore della base a, trovare il logaritmo d'un numero qualunque Z.

Sia Z $= 5$, e nell'equazione $a^x = y$ sia $y = 1$, ed $y = 10$; fatto

$A = 1$, sarà $lA = 0$

$B = 10$ $\quad lB = 1$

cioè Z sta tra A, B. Si cerchi un medio geometricamente proporzionale tra A, B; si avrà $C = \sqrt{AB}$; cioè C eguale a 10 alzato alla potenza, che ha per esponente un medio aritmeticamente proporzionale tra zero, e l'unità: Per evitare le frazioni in questa, ed in simili determinazioni, si metta dopo i termini A, B, ed lA, lB un egual numero di zeri, per esempio sei, o sette; sarà

$A = 1$, 000000 ..... $lA = 0$, 0000000

$B = 10$, 000000 ..... $lB = 1$, 0000000

$C = 3$, 162277 ..... $lC = 0$, 5000000

Il C trovato non è eguale a Z, e sta Z tra C, B. Si determini allo stesso modo un medio geometricamente proporzionale tra C, B; si avrà $D = \sqrt{BC}$, cioè 10 alzato ad una potenza, che ha per esponente un medio aritmetico tra lB, e lC ....., e così si proceda successivamente, come nello schemma seguente, finoacchè uno de' medj proporzionali sia Z.

A

$A = 1,000000$	$lA = 0,0000000$		
$B = 10,000000$	$lB = 1,0000000$		Sia
$C = 3,162277$	$lC = 0,5000000$	$C =$	$\sqrt{AB}$
$D = 5,623413$	$lD = 0,7500000$	$D =$	$\sqrt{BC}$
$E = 4,216964$	$lE = 0,6250000$	$E =$	$\sqrt{CD}$
$F = 4,869674$	$lF = 0,6875000$	$F =$	$\sqrt{DE}$
$G = 5,232991$	$lG = 0,7187500$	$G =$	$\sqrt{DF}$
$H = 5,048065$	$lH = 0,7031250$	$H =$	$\sqrt{FG}$
$I = 4,958069$	$lI = 0,6953125$	$I =$	$\sqrt{FH}$
$K = 5,002865$	$lK = 0,6992187$	$K =$	$\sqrt{HI}$
$L = 4,980416$	$lL = 0,6972656$	$L =$	$\sqrt{IK}$
$M = 4,991627$	$lM = 0,6982421$	$M =$	$\sqrt{KL}$
$N = 4,997242$	$lN = 0,6987304$	$N =$	$\sqrt{KM}$
$O = 5,000052$	$lO = 0,6989745$	$O =$	$\sqrt{KN}$
$P = 4,998647$	$lP = 0,6988525$	$P =$	$\sqrt{NO}$
$Q = 4,999350$	$lQ = 0,6989135$	$Q =$	$\sqrt{OP}$
$R = 4,999701$	$lR = 0,6989$[illegible]40	$R =$	$\sqrt{OQ}$
$S = 4,999876$	$lS = 0,6989592$	$S =$	$\sqrt{OR}$
$T = 4,999963$	$lT = 0,6989668$	$T =$	$\sqrt{OS}$
$V = 5,000008$	$lV = 0,6989707$	$V =$	$\sqrt{OT}$
$W = 4,999984$	$lW = 0,6989687$	$W =$	$\sqrt{TV}$
$X = 4,999997$	$lX = 0,6989697$	$X =$	$\sqrt{WV}$
$Y = 5,000003$	$lY = 0,6989702$	$Y =$	$\sqrt{VX}$
$Z = 5,000000$	$lZ = 0,6989700$	$Z =$	$\sqrt{XY}$

Si ha dunque $l5 = 0,69897$, cioè $10^{0,69897} = 5$.

Allo ſteſſo modo ſi poſſono trovare i logaritmi degli altri numeri per qualunque baſe logaritmica a. Le tavole di Briggio, e di

e di Ulacquio sono calcolate sulla base 10, e sono oramai le più note, e comuni.

101. Sarebbe intollerabile la noja del calcolo, se si dovessero cercare immediatamente col metodo spiegato i logaritmi di tutti i numeri naturali. Quattro sono gli artificj più comuni per abbreviarne il lavoro;

1.° Di cercare col precedente metodo solamente i logaritmi de' numeri primi, e colle multiplicazioni di questi logaritmi, per 2, per 3...., per n si avranno i logaritmi delle loro potenze seconde, terze..., n^{esime}.

2.° Di cercare, coll' addizione de' logaritmi de' numeri primi, i logaritmi de' loro composti.

3.° Di cercare, coll' addizione, o sottrazione de' logaritmi di certi altri numeri non primi, i logaritmi de' loro multipli, o summultipli.

4.° Di cercare, co' logaritmi di varj numeri, posti ad eguale intervallo nella serie naturale, i logaritmi de' numeri intermedj.

I primi tre compendj sono per se chiari dalle formole dell' articolo precedente: Aggiungendo al logaritmo di 10 quello di $\frac{9}{10}$, si ha il doppio logaritmo di 3: Sottraendo il logaritmo di 2 dal logaritmo di 10, si ha il logaritmo di 5... ec. Il quarto compendio dipende dal metodo delle interpolazioni, che noi spiegheremo nel secondo libro.

102. Questi, ed altri compendj per formare le tavole de' logaritmi, si applicano facilmente ad altri metodi più universali, presi da principj più elevati del calcolo. Eulero nell' introduzione citata al num. 94., Reyneau nel secondo tomo dell' Analisi dimostrata, ed altri, mostrano in generale, che il logaritmo del numero $1+x$, che rappresenta qualunque numero maggiore, o minore dell' unità, è eguale ad $\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots\text{ec.}\right)$, ed il valore

di

di k dipende dalla base a fatta eguale ad $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ ec.

103. Tra tutti i sistemi de' logaritmi, due sono i più conosciuti; quello della base $a = 10$, che dà i logaritmi chiamati *volgari*, e quello della base

$$a = 2,7182818284590452353602 8 \ldots \text{ ec.},$$

che dà i logaritmi chiamati *iperbolici* dall' esprimersi, che si fa con essi nella geometria sublime, la quadratura dell' iperbola. Nel sistema volgare, il logaritmo di 10 è l'unità, come al num. 100., e nel sistema iperbolico il logaritmo di 10, è

$$2,302585092994045684017991 4 \ldots \text{ ec.}$$

Di questi logaritmi di 10 si farà uso nell' articolo seguente.

104. Intanto si noti, che i logaritmi della base 10 oltre le utilità generali di tutti i logaritmi di basi diverse, hanno le proprie, e particolari, per cui vengono a preferenza d'ogni altro sistema usati ne' calcoli. Qualunque sistema di logaritmi dà i logaritmi de' numeri naturali (e conseguentemente d'ogni altro numero), composti d'un numero intero chiamato *caratteristica*, e d'una frazione decimale, chiamata da Eulero, e da altri *mantissa*. Ora, i logaritmi de' numeri naturali, tra 1, e 10, stanno nel sistema di $a = 10$, tra lo zero, e l'unità; i logarirmi de' numeri tra 10, e 100, stanno tra 1, e 2, e così nel resto. Onde; 1.° Dato il logaritmo volgare d'un numero, si conosce dalla semplice caratteristica di quante figure (intere) debba essere composto il numero, che gli corrisponde, e dal numero dato si conosce la caratteristica del suo logaritmo; dacchè *la caratteristica del logaritmo volgare è composta di tante unità una meno, quante sono le figure* (intere) *nel dato numero*.

2.° Aumentando di n unità la caratteristica d'un logaritmo, si ha il logaritmo del n^{cuplo} del numero medesimo. Queste due pro-

proprietà, che portano una facilità sorprendente ai calcoli, non sono comuni ai logaritmi di base diversa dai volgari.

Riduzione d'un dato Sistema di Logaritmi a qualunque altro Sistema cercato.

105. Noi non abbiamo per le mani, che i logaritmi costruiti sulla base 10; eppure assai volte, o è utile, o è necessario d'avere i logaritmi costruiti su qualche base diversa. Una generale proprietà de' logaritmi di qualunque sistema ci mette a stato di supplire ad ogni bisogno colle sole tavole comuni: Essa è, che i logaritmi di due numeri di un sistema sono in proporzione geometrica coi logaritmi de' due medesimi numeri dedotti da un altro sistema.

Siano m, n i logaritmi di due numeri A, A' formati colla base a; si avrà $A = a^m$, $A' = a^n$, ed alzando la prima equazione alla potenza n, e la seconda alla potenza m, sarà $A^n = a^{mn}$, $A'^m = a^{mn}$, cioè $A^n = A'^m$, ossia $A = A'^{\frac{m}{n}}$; Allo stesso modo, dati i logaritmi m', n' de' due medesimi numeri in un altro sistema di base a', sarà $A = A'^{\frac{m'}{n'}}$; dunque $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

106. Quindi; 1.° $n' = \frac{m'}{m} \cdot n$. Cioè, se m è il logaritmo d'un numero A' nel sistema comune, ed m' il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema, si avrà il logaritmo n' d'un altro qualunque numero A in questo sistema medesimo. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di $A' = 10$ è l'unità, ed il logaritmo iperbolico di 10 è 2, 3025... ec. $= m'$; sarà $\frac{m'}{m} = \frac{2,\ 3025\ldots \text{ ec.}}{1}$; donde, chiamando L il logaritmo iperbolico di A, sarà $LA = lA \times 2,\ 3025\ldots$ ec.

107. 2.° $n = \frac{m}{m'} . n'$. Cioè, se invece de' logaritmi comuni avessimo le tavole de' logaritmi d'un altro sistema, sarebbe ancora facile il trovare i logaritmi comuni de' numeri. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di 10 è l'unità, ed il logaritmo iperbolico m' di 10 è 2, 3025 ... ec.;

sarà $\frac{m}{m'} = 0, 4342944819032518 27$... ec.;

donde $lA = LA \times 0, 434294$.... ec.

Uso delle tavole de' Logaritmi comuni.

108. Trovare per mezzo delle tavole il logaritmo, che corrisponde ad un dato numero A.

In questo problema non si trova difficoltà alcuna, fuorchè nel caso, in cui A sia un numero misto d'una parte intera, e d'una frazione, o volgare, o decimale, oppure sia A un numero intero maggiore del massimo delle tavole, o finalmente sia una semplice frazione decimale.

Egli è evidente, che i logaritmi de' numeri interi minori del massimo delle tavole si leggono in tutte le tavole immediatamente scritti accanto al dato numero, e che il logaritmo d'una frazione $\frac{v}{y}$ è $lv - ly$. Spiegheremo qui le formole per que' tre primi casi, e soggiungeremo in seguito i compendj, e le avvertenze necessarie per usarle con facilità.

109. Se il dato numero A è misto d'una parte intera B, e d'una frazione C; si cerchi immediatamente dalle tavole lB, e $l(B+1)$, e sia $l(B+1) - lB = D$; facendo $1 : C :: D : s$, sarà $lA = lB + s$.

110. Se il dato numero A è un numero intero maggiore del massimo delle tavole; si divida A per un numero t tale, che

che nel quoziente $B+C$ resti la parte intera B composta di tante figure, una meno, quante sono nel massimo numero delle tavole; sarà $\frac{A}{t}=B+C$, si cerchi (num. 109.) il logaritmo di $B+C$; sarà $l(B+C)=l\frac{A}{t}=lA-lt$; donde $lA=(lB+C)+lt$.

111. Se il dato numero A è una semplice frazione decimale, si multiplichi A per un numero t tale, che il prodotto B sia un numero intero; sarà $B=At$, ed $lB=lAt=lA+lt$; donde $lA=lB-lt$.

112. Ecco alcuni compendj. Nel primo problema; 1.° Se sia C una frazione volgare rappresentata da $\frac{E}{F}$, si avrà $A=\frac{BF+E}{F}$, e $lA=l(BF+E)-lF$; giova questo compendio, massimamente quando $BF+E$ non è un numero maggiore del massimo delle tavole.

2.° Se la frazione C sia una semplice frazione decimale di r figure, avendone n l'intero B, ed $n+r$ non sia numero maggiore del numero m di zeri, che ha il massimo delle tavole, basterà considerare $B+C$ come un numero intero, e sarà $(10)^r A=B+C$, e trovato il logaritmo di $B+C$ immediatamente dalle tavole, sarà $l(B+C)=l(10)^r A=lA+l(10)^r$; donde $lA=l(B+C)-r$, ooo... ec.

3.° Se $n+r>m$, si piglino le prime figure m, come se esprimessero un intero B, ed il residuo fosse un rotto decimale C; trovato col metodo del num. 109. il $l(B+C)$, sarà $lA=(lB+C)-(m-n)$, ooo ... ec.

4.° Si noti, che il precedente compendio avrà uso ancor quando sia A un semplice decimale, ed $r>m$, basta fare nella formola precedente $n=0$, e sarà $lA=l(B+C)-m$, oooo... ec.

113. Siccome la multiplicazione, o divisione d'un numero

 per

per un termine della ſerie decadica 10 . 100 . 1000 ... ec. ſi fa facilmente, o coll' aggiungere al dato numero verſo la deſtra de' zeri, o colla virgola ſeparatrice de' decimali, ſarà meglio, nel problema ſecondo, e terzo, prendere per t un termine della ſerie medeſima. Così al num. 110. ſia 1 con m zeri il maſſimo numero delle tavole, ed il numero dato A abbia figure $m+r$; ſi chiami B l'intero eſpreſſo dalle ſole figure prime m (cioè preſe da ſiniſtra a deſtra), ed il reſto conſiderato come decimale ſi chiami C; ſarà $\frac{A}{(10)^r}=B+C$, e trovato (num. 109.) il logaritmo di $B+C$, ſarà $l(B+C)=l\frac{A}{(10)^r}=lA-l(10)^r$, donde $lA=l(B+C)+r$, 000 ... ec. Ed al num. 111., ſia r il numero delle figure, che vengono dopo la virgola nel decimale A, e ſia l'intero $B=(10)^r A$; ſarà $lB=lA+l(10)^r$; onde $lA=lB-r$, 0000 ... ec.

114. Avvertenze. 1.° Il logaritmo trovato al num. 109. non è del tutto eſatto, ma ſolo proſſimamente: Il metodo ſuppone le differenze de' numeri proporzionali alle differenze de' loro logaritmi, ciocchè non è vero parlando per ſe; per avere i medj geometrici, non baſta il prendere gli aritmetici.

2.° Le differenze de' logaritmi tanto ſono più proſſimamente proporzionali alle differenze de' numeri, quanto i numeri ſono più grandi, e ſi diſcoſtano enormemente dalla proporzionalità ne' numeri molto piccoli, come di una, ed anche di due figure. Ciò ſi può dimoſtrare *a priori*, ma ſi vedrà facilmente dalle tavole: Se ſi prendano nelle tavole comuni i $l(A+2)-l(A+1)$, e $l(A+1)-lA$, non ſi troveranno mai eguali queſte differenze, ma eſſe ſi ſcoſteranno poco dall' uguaglianza, ſe A ſi piglj verſo il fine delle tavole, e ſaranno molto diſuguali tra ſe, ſe ſi piglino verſo al principio.

3.° Quindi nel caſo del num. 109. ſe B foſſe un numero

troppo

troppo piccolo, converrebbe ridurre la frazione volgare C in decimali, e servirsi d'uno de' compendj posti al num. 113., ma basterà pigliare un numero $2m-n$ di figure decimali.

4.° In generale però si può vedere con facilità fino a quali figure di decimali debba essere esatto il logaritmo, che si trova col metodo del num. 109. si esamini fino a quali figure di decimali sia $l(B+1)-lB$ eguale a $l(B+2)-l(B+1)$, e fino alle stesse sarà sicuramente esatto l's del num. 109.; lo sarà fors'anche fino all' immediata seguente, essendo più proporzionali le differenze tra $l(B+1)$, e lB, che tra $l(B+2)$, e lo stesso lB; le inferiori figure per l'ordinario verranno erronee.

115. Trovare per mezzo delle tavole il numero, che corrisponde ad un dato logaritmo comune. Anche in questo secondo problema tre soli sono i casi, che seco portano qualche difficoltà: Quando il dato logaritmo è minore del massimo logaritmo delle tavole: Quando il dato logaritmo è maggiore del logaritmo massimo delle tavole: Quando il dato logaritmo è negativo. E' evidente, che se il dato logaritmo si trova esatto nelle tavole, vi starà scritto accanto il numero, che vi corrisponde.

116. Se il dato logaritmo lA è minore del massimo delle tavole. Sia lB il logaritmo prossimamente minore di lA, sarà $l(B+1)$ il logaritmo prossimamente maggiore, si faccia

$$l(B+1)-lB:1::lA-lB:\frac{lA-lB}{l(B+1)-lB}=s;$$

sarà $A=B+s$.

117. Se lA è maggiore del massimo logaritmo delle tavole. Sia $m+1$ la caratteristica del massimo logaritmo delle tavole, ed $m+n$ la caratteristica di lA; si faccia

$$lA-n,0000\ldots \text{ec.}=l\frac{A}{(10)^n}=lB;$$

sarà $A=(10)^n B$.

118. Se

118. Se lA è negativo. Sia $n-m$ la caratteristica di lA; si faccia $lA+(m+n)$, ooo... ec. $=l(10)^{m+n}A=lB$;

farà $A=\frac{1}{(10)^{m+n}}B$.

119. Queste formole si deducono da' medesimi principj, da' quali si sono dedotte quelle del problema precedente, ed hanno de' compendj analoghi, e delle simili avvertenze.

Nel primo problema; 1.° Se la caratteristica è troppo piccola, conviene, per evitare gli errori, accrescerla quanto si può: Sia $m+1$ la caratteristica massima delle tavole, ed $m-n$ la caratteristica del dato logaritmo: Si trovi il numero corrispondente alla caratteristica m unita alla data mantissa, riducendo la frazione in decimali, e si trasporti la virgola divisoria da destra a sinistra per figure n, cosicchè siano $m-n$ figure negli interi.

2.° La frazione s si dovrà sempre ridurre in decimali, e di questi basterà trovarne tante figure, che tra interi, ed essi vi sia un numero $2m$ di figure; il resto non sarebbe esatto.

3.° Spesso non sarà bisogno di tener conto della frazione, principalmente quando la caratteristica fosse zero, oppure 1, ed insieme bastasse di avere il numero cercato in tre, o due decimali; si cerchi al fine delle tavole comuni il numero corrispondente alla data mantissa, e si prendano una, o due delle quattro figure, che formano il numero corrispondente, per interi, e le altre per decimali.

120. Nel secondo problema; 1.° Se fosse $n>m$, basterà svolgere la frazione, che sta in B in decimali, finchè vi sieno figure in tutto $2m$; a questo B si aggiungano verso la destra tanti zeri fino a compire un numero di figure $m+n+1$.
2.° Si potrebbe dividere il dato logaritmo in due, o più, tali, che tutti si trovino nelle tavole, e prendere il prodotto de' loro numeri; ma questo metodo sarà il più delle volte, o difficile assai, o fatto all' azzardo.

121. Nel

121. Nel problema terzo: 1.° Si può considerare lo lA come positivo, e trovato il numero A, che vi corrisponde, sarà $\frac{1}{A}$ il numero cercato.

2.° Se cercando la frazione $\frac{E}{F}$, che corrisponde ad un logaritmo negativo lA, si voglia, che il denominatore F, o il numeratore E sia un numero dato, sarà nel primo caso $lE = lF + lA$, e nel secondo sarà $lF = lE - lA$.

3.° Se nella formola del num. 119. fosse $m = 0$, come spesso accade ne' calcoli ordinarj, la formola sarebbe più semplice, cioè $A = \frac{1}{(10)^n} B$; ed allora per n basterebbe prendere il logaritmo 4 del massimo numero 10000 delle tavole comuni.

Metodo per evitare i Logaritmi negativi.

122. IN qualunque sistema de' logaritmi, il logaritmo delle frazioni proprie è negativo, per essere, come s'è dimostrato, il logaritmo dell' unità eguale a zero. Sanno i soli calcolatori di tavole astronomiche, e quegli, che maneggiano per mezzo de' logaritmi i problemi trigonometrici quanto grande imbarazzo s'introduca ne' calcoli un po' prolissi da questi logatitmi delle frazioni, onde ben a proposito s'è pensato ad un metodo facile, e sicuro per evitargli. Tutto il metodo è fondato sulla seguente proposizione:

Si può supporre, che il logaritmo dell' unità sia $(10)^n$; è tutti i logaritmi *Ideali*, che in questa supposizione si dedurranno dal calcolo per le frazioni, corrisponderanno a frazioni decimali, che avranno verso la sinistra tanti zero meno uno, quante sono le unità, che mancano alla caratteristica per compire l'assunto termine decadico: Un' occhiata alla seguente tavola.

Nu-

Numeri Naturali.	Logaritmi Volgari.	Logaritmi Ideali.
10000	+ 4, 0000000	14, 0000000 .... 104, 0000000
1000	+ 3, 0000000	13, 0000000 .... 103, 0000000
100	+ 2, 0000000	12, 0000000 .... 102, 0000000
10	+ 1, 0000000	11, 0000000 .... 101, 0000000
1	0, 0000000	10, 0000000 .... 100, 0000000
0, 1	— 1, 0000000	9, 0000000 .... 99, 0000000
0, 01	— 2, 0000000	8, 0000000 .... 98, 0000000
0, 001 ...	— 3, 0000000	7, 0000000 .... 97, 0000000
0, 0001 ..	— 4, 0000000	6, 0000000 .... 96, 0000000
.... ec.		

123. Sembra, che si cambj con questa supposizione tutta la teorìa de' logaritmi; dacchè fatto $y = 1$, non è più $a^{(10)^n}$ eguale all' unità; ma, a vero dire, non si porta con ciò alcuno sconcerto nelle tavole logaritmiche. Fatta che sia comune a tutti i logaritmi questa supposizione, si cambieranno tutti nella ragione stessa, o, che è lo stesso, le variazioni saranno relativamente tutte eguali. Se si aggiungano a tutte le caratteristiche de' logaritmi n unità, si multiplicano i numeri corrispondenti per $(10)^n$, ma, e questi, e quegli mantengono sempre la stessa ragione tra se, che avevan prima. In una parola, l'artificio presente si riduce al compendio terzo del num. 119., ed equivale all' uso delle tavole, che incominciano non dal zero, ma da $(10)^n$.

124. Ciò supposto: Sia $(10)^n$ il logaritmo dell' unità, e sia L la lettera, che indica il logaritmo ideale d'un numero qualunque A; si disegni, come prima, per l il logaritmo comune del medesimo A, e per q la mantissa di A.

Si avrà $LA = (10)^n + lA$

quindi $LA^m = (10)^n + lA^m = (10)^n + mlA$

$$LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + lA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m} lA.$$

125. E'

125. E' evidente: 1.° Che per avere il logaritmo ideale di qualunque numero A, e di qualunque ſua potenza, o radice, di cui ſia dato il logaritmo comune, baſta aggiungere $(10)^n$ al dato logaritmo comune del medeſimo, o, che è lo ſteſſo, baſta ſoſtituire nelle precedenti tre formole *ecumeniche* il valore di lA, mlA, $\frac{1}{m} lA$.

2.° Che per avere il logaritmo comune di un numero A, e di qualunque ſua potenza, o radice, di cui ſia dato il logaritmo ideale, baſta ſottrarre $(10)^n$ dal dato logaritmo ideale, oſſia traſporre nelle precedenti tre formole ecumeniche il termine $(10)^n$, e ſoſtituirvi il valore di LA, LA^m, $LA^{\frac{1}{m}}$.

126. Nei calcoli ordinarj della trigonometrìa, e dall' aſtronomìa, è ſufficiente il ſupporre $n = 1$. Si dinoti adunque con l' il *complemento aritmetico* d'un dato logaritmo comune, cioè la differenza del dato logaritmo da 10, e facendo nelle predette formole le ſoſtituzioni di lA, preſo dagli articoli precedenti, ſi avrà

Per la prima Formola Ecumenica

$$LA = (10)^n + lA$$

I. Se A è un numero intero di r figure,

ſarà $LA = 9 + r + qA$

II. Se A è una frazione decimale; chiamando D le figure ſignificative del medeſimo, preſe per intere, ed r il numero totale delle figure tra zeri, ed interi, che vengono dopo la virgola;

ſarà $LA = (10 - r) + lD$.

III. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue ſiano numeri interi, o decimali;

ſarà $LA = lB + l'C$.

IV. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C ſia intero, o decimale;

ſarà $LA = l'C$

Per la ſeconda Formola Ecumenica

$$LA^m = (10)^n + m\,l\,A$$

V. Se A è un numero intero di r figure;

ſarà $LA^m = 10 + m\,(r-1) + m\,q\,A$

VI. Se A è una frazione decimale di r figure dopo la virgola, contando anche le ſignificative D;

ſarà $LA^m = 10 - m\,r + m\,l\,D$

VII. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue ſiano numeri interi, o decimali;

ſarà $LA^m = 10\,(1-m) + m\,(l\,B + l'C)$

VIII. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C ſia intero, o decimale;

ſarà $LA^m = 10\,(1-m) + m\,l'\,C$

Per la terza Formola Ecumenica

$$LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m}\,l\,A$$

Baſta ſoſtituire nelle quattro formole dedotte dalla ſeconda Ecumenica il numero $\frac{1}{m}$ invece di m.

127. Colla traſpoſizione del num. 125. ſi può avere il numero, che corriſponde ad un logaritmo ideale; ma v'ha per ciò un' altra ſtrada più corta, e più ſemplice. Si trovino ſul fine delle tavole le figure corriſpondenti alla mantiſſa del dato logaritmo ideale, e chiamando t la caratteriſtica del medeſimo loga-

garitmo; 1.° Se $t=9$, tutte le figure trovate si mettano immediatamente dopo la virgola decimale.

2.° Se $t>9$, si metta la virgola decimale dopo $t-9$ figure prese da sinistra verso la destra.

3.° Se $t<9$, si metta dopo la virgola, ed alla sinistra delle figure trovate, un numero $9-t$ di zeri. Tutto è evidente dall' essere nel primo caso $9-10=-1$, che per il num. 103. ci fa riporre subito dopo la virgola le figure corrispondenti alla mantissa del logaritmo, che ha -1 per caratteristica.

128. Il frequente uso delle precedenti formole suggerirà ne' casi particolari certi compendj, che infinita, e nojosa cosa sarebbe il riferirgli qui minutamente. Ne accenno due soli.

1.° Se nel cercare il logaritmo ideale di $\frac{B}{C}$, quando B, e C sono frazioni decimali, si usi la formola III., si dovranno fare tre sottrazioni; si avrà con compendio di calcolo il logaritmo cercato, se si sottragga il LC da LB, aggiungendo se fa bisogno tante diecine alla caratteristica di LB, quante se ne richieggono per potervi, dopo la sottrazione delle altre figure, sottrarre ancora la caratteristica di LC dalla caratteristica di LB.

2.° Trovandosi facilmente col metodo precedente il $L\frac{B}{C}$, quando siano B, C numeri decimali, la formola VII., per avere il logaritmo ideale della potenza m di $\frac{B}{C}$ si riduce a sottrarre da $mL\frac{B}{C}$, o dalla sua caratteristica, il numero $10(m-1)$, e conseguentemente per avere il logaritmo ideale della radice m di $\frac{B}{C}$, basta aggiungere a $L\frac{B}{C}$, o alla sua caratteristica, il numero $10(m-1)$, e dividere per m tutta la somma.

 129. Par-

129. Parmi, che coi cinque articoli, ne' quali è suddiviso il presente capo resti dedotta, non senza qualche particolare eleganza, da' suoi più sodi, e più universali principj tutta la teorìa de' logaritmi: Principalmente in quest' ultimo articolo mi sono studiato di trattare ampiamente la teorìa de' logaritmi negativi. Essa è stata introdotta da pochi anni in quà, ma nessuno, ch'io sappia, s'è finora presa la pena di ridurla a metodo, ed a formole facili (*) all' uso. Unicamente ho letto su questa materia il Sig. De La Lande, che al libro ventesimo quarto della sua Astronomia, stende la pura pratica di questo calcolo *per le frazioni decimali;* e l'Abbate La Caille, che al num. 344... ec. de' suoi Elementi d'algebra insegna l'uso delle tavole logaritmiche formate sull' ipotesi di $l\,1 = 10$ *per le frazioni volgari, e decimali.*

LI.

(*) *La Teorìa de' logaritmi negativi è una parte delle Matematiche Elementari la più interessante per tutti i Calcolatori: converrebbe però* (dicono alcuni) *che si rendesse più piana, ed addattata alla pratica, spogliandola, per quanto si può, da quel serioso, e per alcuni aspro corredo delle formole algebraiche.* Io veramente mi sono fermato soltanto a sviluppare i principj generali sui quali essa s'appoggia, ed a dedurne le formole astratte per tutto il calcolo: Ciò solo portava l'uniformità del metodo, che regna in tutta questa, qualunque siasi, operetta: Lo svolgere esattamente tutte le formole in teoremi, ed il fare certe particolari riflessioni esemplificate con esempj a scioglimento di quelle difficoltà, che s'incontrano nella loro applicazione, l'ho lasciato qui, e dappertutto altrove, all' industria, ed al privato studio del leggitore. Come però sono convinto della necessità di far bene a tutti comprendere il calcolo de' logaritmi negativi, mi sono determinato ad inserire al fine del secondo mio libro una Memoria, ultimamente composta, ed ancora inedita, su questa materia, del P. Ruggiero Boscovich. Quella supplirà abbondevolmente a tutto; abbraccia essa, e la teorìa, e la pratica, di modo, che può ommettere l'una chi solamente dilettisi dell' altra, e chi si compiaccia d'amendue le potrà vedere in un sol punto di vista unite, ed illustrate. Trall' altre sue belle riflessioni, prende il P. B. ad esaminare un caso da me indicato solamente, perche con qualche calcolo riducibile agli altri, cioè quando A sia una tale frazione $\frac{BCD\ldots\ ec.}{MNP\ldots ec.}$, che abbia uno, o più fattori decimali in uno, o in amendue de' suoi termini.

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle Serie.

CAPO PRIMO.

Serie, che nascono dalle potenze, e dalle radici algebraiche.

Proprietà delle potenze d'un binomio.

1. SI chiama *Serie*, come è noto, dagli Analisti qualunque moltitudine, ammasso, unione di quantità, che le une alle altre succedansi con un cert' ordine, e con una costante legge comune a tutti; e la parte più interessante nella teorìa delle serie è di trovare i termini generali delle serie proposte, e date le serie, o i loro termini generali, trovare la somma generale delle medesime. Per andare con ordine in questa trattazione, esporrò nel presente capo, e nel seguente, diverse serie, che naturalmente si svolgono, e nascono dal calcolo delle quantità algebraiche, e nel capo terzo, dopo d'avere distinte in classi, ed espresse generalmente diverse serie, spiegherò il metodo per trovare la loro somma, ed il loro termine generale.

2. Le serie, che nascono dalle potenze algebraiche d'un binomio vogliono essere le prime a considerarsi: tutte racchiudonsi sotto la forma $(a+b)^{m-1}$: Contempliamo per ciò nella tavola seconda le potenze prima, seconda, terza..... di $a+b$. 1.º La più alta potenza di a, ha per esponente l'esponente della potenza di $a+b$, e sta solamente nel primo termine di ciascuna potenza, andando sempre sminuendo d'un' unità negli

altri

altri, fino all' ultimo termine, nel quale non si trova potenza alcuna di a, ovvero si trova a^0.

2.º La seconda parte b del binomio $a+b$ non si vede nel primo termine, o più veramente, vi si trova coll' esponente zero, è di una dimensione nel secondo termine, e da questo agli altri termini crescono sempre d'un' unità gli esponenti delle sue potenze, fino all' ultimo, in cui egli ha la sua potenza massima d'esponente eguale all' esponente della potenza.

3.º Quindi in ciascuna potenza di $a+b$ gli esponenti della prima parte a formano una progressione aritmetica decrescente colla differenza costante eguale all' unità, e gli esponenti di b formano la stessa progressione, ma rovesciata, cioè disposta con ordine contrario. Tutto s'intenda andando da sinistra verso la destra.

4.º In ciascun termine le dimensioni, o gli esponenti delle potenze di a, e di b prese insieme sono tante, quante sono le unità nell' esponente della potenza, e quindi tutti i termini delle particolari potenze di $a+b$ sono omogenei.

5.º Ciascuna potenza del binomio è formata da tanti termini più uno, quante sono le unità nell' esponente del grado; la seconda potenza ha tre termini, la terza quattro..... ec.

6.º In qualunque potenza di $a+b$ il numero de' termini, ne' quali si trova b, è eguale al numero de' termini, ne' quali si trova l'a, e questo numero è eguale all' esponente della potenza.

7.º L'ultimo termine di qualunque potenza, cioè b^m è eguale al coefficiente mb, che ha l'altra parte a del binomio nel secondo termine della potenza medesima, ma diviso per m, ed alzato alla potenza m; $b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$

$$b^3 = \left(\frac{3b}{3}\right)^3$$

... ec.

8.º Da

8.º Da ciascuna formola delle potenze di $a+b$, si deducono le parti componenti di ciascuna potenza d'un binomio. Il quadrato, o la seconda potenza d'un binomio qualunque è composto dai quadrati delle parti, e da due prodotti della prima parte nella seconda; il cubo, o la terza potenza d'un binomio qualunque è composto da' cubi delle parti, da' tre prodotti del quadrato della prima parte nella seconda, e da' tre prodotti del quadrato della seconda nella prima. La quarta potenza... ec.

3. Meritano una particolare riflessione i coefficienti numerici de' termini di ciascuna potenza. 1.º In ciascuna potenza di $a+b$ i coefficienti numerici de' termini egualmente lontani dagli estremi sono eguali. Nella quinta potenza di $a+b$ il coefficiente 5 del secondo termine è eguale al coefficiente 6 del penultimo; il... ec.

2.º I coefficienti numerici di ciascuna potenza, crescono di termine in termine, quindi con ordine contrario decrescono fino all' ultimo.

3.º Quindi per le potenze d'esponente impari, basta trovare i coefficienti della metà del numero de' termini, per avere i coefficienti degli altri termini: per le potenze d'esponenti pari... ec.

4.º I coefficienti de' primi termini delle potenze di $a+b$ formano una serie paralella d'unità: i cofficienti de' secondi termini formano la serie de' numeri naturali: i coefficienti degli altri termini formano diverse serie di numeri, che tutte nascono dalla somma continua de' termini della serie precedente.

5.º Se l'esponente della prima parte a d'un termine qualunque n^{esimo}, si multiplichi per il coefficiente numerico del medesimo termine n^{esimo}, ed il prodotto si divida per il numero de' termini precedenti inclusivamente il termine n^{esimo}, il quoto sarà eguale al cofficiente del termine, che segue, cioè del termine $(n+1)^{esimo}$.

4. Soggiungo due altri metodi per trovare i cofficienti di ciascun termine per le formole delle potenze di $a+b$.

Pri-

Primo metodo 1 . 1 .... coefficienti della prima potenza

$\frac{1\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,1}$ ..... coefficienti della seconda potenza

$\frac{1\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,1}$ .. coefficienti della terza potenza

$\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,1}{1\,.\,4\,.\,6\,.\,4\,.\,1}$ coefficienti della quarta potenza

...... ec.

Secondo metodo più semplice. Si alzi alla potenza m il binomio $1+1$; i termini di questa potenza saranno i coefficienti della potenza m del binomio $a+b$.

$(1+1)^2 = 1+2+1$ .... coefficienti di $(a+b)^2$

$(1+1)^3 = 1+3+3+1$ ..... coefficienti di $(a+b)^3$

..... ec.

5. Queste considerazioni sulle potenze del binomio $a+b$ hanno grandissimo uso nell' Analisi delle equazioni: ne accenno due soli. 1.° Ci sono molte equazioni, nelle quali uno de' membri può divenire una potenza perfetta d'una quantità conosciuta, coll' aggiungere all' equazione medesima, o col sottrarne un' altra conosciuta quantità: Se si sottragga b^3 dai membri dell' equazione $x^3 - 3bx^2 + 3b^2 x = c^3$, si ha $x^3 - 3bx^2 + 3b^2 x - b^3 = c^3 - b^3$, in cui il primo membro è un cubo perfetto di $x-b$; aggiungendo a^2 ai membri dell' equazione $x^2 - 2ax = bc$, si ha $x^2 - 2ax + a^2 = bc + a^2$ ... ec.
2.° Rendendo con quest' artificio potenza perfetta di qualche quantità uno de' membri dell' equazione, si viene ad avere il valore dell' incognita con una semplice estrazione di radici. Per le equazioni di secondo grado della forma $x^2 - px - q = 0$, sarà $x^2 - px = q$, ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine px, cioè aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$,

si ha

si ha $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; donde estraendo la radice seconda, si ha $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, come al num. 94 dell' introduzione.

Per le equazioni di grado quarto della forma $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, sarà $x^4 - px^2 = qx + r$, ed aggiungendo $zx^2 + \frac{(p+z)^2}{4}$ si avrà $A \ldots\ldots x^4 - (p-z)x^2 + \frac{(p+z)^2}{4} = zx^2 + qx + r + \frac{(p+z)^2}{4} = z\left(x^2 + \frac{qx}{z} + \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}\right)$. Considerando il primo membro di quest' equazione, si vede subito, che esso è un quadrato perfetto; il secondo membro dell' equazione medesima sarebbe pure un quadrato multiplicato per z, se fosse $\frac{q^2}{4z^2} = \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}$, cioè se fosse $\frac{q^2}{4z} = r + \frac{(p+z)^2}{4}$, ossia se fosse $z^3 + 2pz^2 + p^2 z - q^2 = 0$;
$ + 4rz$
sostituendo adunque in A il valore di z preso da questa equazione, ed estraendo le radici, si avrà trasponendo, $x^2 \mp x\sqrt{z} \mp \frac{q}{2\sqrt{z}} = 0$; che, coll' ambiguità de'
$+ \frac{z-p}{2}$
segni, e l'x^2, esprime tutte e quattro le radici della data equazione.

6. Ma per tornare al nostro proposito; per il num. 2. si hanno per ordine tutte le potenze di ciascuna parte a, b del binomio $a+b$; per il num. 3. si trovano i coefficienti di ciascun termine delle potenze medesime; per avere adunque qua-

lunque potenza del binomio $a+b$, non farà bisogno, che di unire acconciamente insieme questi coefficienti, e queste potenze delle parti a, b. Così i coefficienti della quarta potenza d'un binomio sono 1.4.6.4.1; le potenze della prima parte a sono $a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0$; le potenze della seconda parte b sono $b^0 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4$; si dispongano queste tre serie, come nella figura seguente, e multiplicando separatamente tutto ciò, che si trova nella stessa colonna verticale

a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
b^0	b^1	b^2	b^3	b^4
1	4	6	4	1

Sarà $(a+b)^4 = a^4 + 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4$

7. Se si potesse generalmente esprimere per qualunque grado di potenze ciascuna di queste tre serie; la multiplicazione de' termini di queste serie, fatta come nell'esempio precedente, ci darebbe una espressione generale di tutte le potenze d'un binomio, e ciò basterebbe per isvolgere in serie le quantità della forma $(a+b)^{m-1}$. Proviamoci a farlo.

Evoluzione in serie delle potenze d'un binomio.

8. Sia P la prima parte del dato binomio, e Q la seconda; sarà $P+Q$ la generale espressione del medesimo; sia in oltre $m-1$ l'esponente della potenza cercata.

1.° L'esponente del primo termine di qualunque potenza è eguale all' esponente della potenza cercata; il primo termine adunque di qualunque potenza $m-1$ di $P+Q$, sarà P^{m-1}; e siccome gli esponenti della prima parte P vanno scemando d'un' unità negli altri termini, la serie delle potenze di P sarà generalmente

$$P^{m-1} . P^{m-2} . P^{m-3} . P^{m-4} . P^{m-5} \ldots . \text{ec.}$$

2.° La

2.° La seconda parte $\mathfrak{Q}$ ha l'esponente zero nel primo termine, l'esponente 1 nel secondo, il 2 nel terzo... ec., cioè la serie delle potenze della seconda parte $\mathfrak{Q}$ sarà generalmente

$$\mathfrak{Q}^0 \,.\, \mathfrak{Q}^1 \,.\, \mathfrak{Q}^2 \,.\, \mathfrak{Q}^3 \,.\, \mathfrak{Q}^4 \,.\, \mathfrak{Q}^5 \,.\, \mathfrak{Q}^6 \,\ldots\ldots \text{ec.}$$

3.° Si multiplichi l'esponente $m-1$ della prima parte P, che sta nel primo termine, per il coefficiente 1 del primo termine medesimo, e si divida il prodotto per il numero de' termini, che precedono il secondo; si avrà $\frac{m-1}{1}$ per coefficiente del secondo termine; Multiplicando $m-2$ esponente di P, che sta nel secondo termine per $\frac{m-1}{1}$ coefficiente del secondo termine, si ha $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1}$; e dividendo questo prodotto per 2, numero de' termini, che precedono il terzo, si ha $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$ per coefficiente del terzo termine; e colla stessa legge si troverà generalmente la serie de' coefficienti

$$1;\ \frac{m-1}{1};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3};\ldots\ \text{ec.}$$

4.° Disponendo queste tre serie come nel num. precedente, si avrà

$$\begin{array}{llll} P^{m-1} & P^{m-2} & P^{m-3}\ldots\ \text{ec.} & \\ \mathfrak{Q}^0 & \mathfrak{Q}^1 & \mathfrak{Q}^2\ \ldots\ldots\ \text{ec.} & \\ 1 & \frac{m-1}{1} & \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} & \ldots\ \text{ec.} \end{array}$$

$$(P+\mathfrak{Q})^{m-1} = P^{m-1} + \frac{m-1}{1} P^{m-2}\mathfrak{Q} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} P^{m-3}\mathfrak{Q}^2 + \ldots \text{ec.}$$

Questa formola con poche sostituzioni si riduce alla celebre formola Newtoniana del binomio.

9. Qualunque quantità polinomia si può separare in due parti, una delle quali si chiami P, e l'altra Q: quindi colla precedente formola si può elevare a qualunque potenza $m-1$ qualunque quantità polinomia; l'esperienza però mostra quanto siano nojose le frequenti sostituzioni, che si devono perciò fare nella predetta formola, di quantità alle volte assai complesse. Tentiamo adunque, colla scorta di Eulero, di renderla più commoda del pari, che universale anche per le quantità infinitinomie (*).

Si osservi: 1.° Che $P+Q$ è eguale a $P\left(1+\frac{Q}{P}\right)$; cioè $(P+Q)^{m-1}$ $=P^{m-1}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; alzando adunque alla potenza $m-1$ il secondo fattore $1+\frac{Q}{P}$, e multiplicando ciascuno de' suoi termini per P^{m-1}, si avrà la potenza $m-1$ di $P+Q$.

2.° Per

(*) Il P. Ruggiero Giuseppe Boscovich ha pubblicato nel giornale de' letterati di Roma all' anno 1747. un altro elegantissimo metodo, per alzare un infinitinomio a qualunque potenza, e nel 1748. vi ha aggiunto una memoria divisa in due parti, che contiene varie importanti riflessioni sul metodo medesimo. Uno de' singolari pregi di questo metodo si è, che fa trovare immediatamente da se, e con somma facilità qualunque termine della potenza cercata senza avere ricorso ai termini precedenti; con ciò egli schiva le frequenti diverse sostituzioni, sempre necessarie negli altri metodi, e sempre moleste al calcolatore. Noi ci siamo serviti in questo secondo libro del metodo d'Eulero per essere più uniformi nello scrivere, e più coerenti a tutta la presente dottrina della evoluzione delle serie; ma stimiamo di non dovere privare il pubblico del piacere, e del profitto, che possono trarre gli Studiosi delle Matematiche, dalla lettura d'una memoria ancora inedita del citato P. B, in cui ha egli resa la dimostrazione del suo metodo, e più diretta, ed incomparabilmente più semplice, che nelle altre due. Questa memoria si troverà al fine del libro.

2.º Per alzare $1+\frac{Q}{P}$ alla potenza $m-1$; è evidente, che se

sarà $\frac{Q}{P}=ax$, sarà pure $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=(1+ax)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}$

$ax+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}a^2x^2+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^3+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=\left(1+(ax+bx^2)\right)^{m-1}$

$=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2)+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}(ax+bx^2)^2+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2+cx^3$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$

$=\left(1+(ax+bx^2+cx^3)\right)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2+cx^3)$

$+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}(ax+bx^2+cx^3)^2+\ldots$ ec.

Se... ec.

10. Supposte queste cose; 1.º Si rappresenti indeterminatamente la potenza $m-1$ di $1+\frac{Q}{P}$ colla serie $1+Ax+Bx^2$

$+Cx^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}+Nx^m$; resta a trovarsi il valore di A, B, C, D... ec.

2.º Col metodo esposto nella introduzione, si formino le potenze particolari indicate nel num. precedente, e per ciascuna supposizione del valore $\frac{Q}{P}$ si ordini per x la potenza $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; rappresentandosi colla serie precedente ciascuna serie di $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$ si potranno supporre eguali tra se i termini corrispondenti di amen-

amendue; onde si ha $(1+ax)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$

$+ \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \; . \; 2} a^2 x^2 + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1 \; . \; 2 \; . \; 3} a^3 x^3 + \ldots$ ec.

ed $A = \frac{m-1}{1} a \qquad C = \frac{m-3}{3} a B \qquad N = \frac{m-n}{n} a M.$

$B = \frac{m-2}{2} a A \qquad D = \frac{m-4}{4} a C$

Di più si ha $(1+ax+bx^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$

$+ \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \; . \; 2} a^2 x^2 + \ldots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} b x^2$

ed $A = \frac{m-1}{1} a \qquad C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A$

$B = \frac{m-2}{2} a A \qquad N = \frac{m-n}{n} a M + \frac{2m-n}{n} b L$

Finalmente si ha per l'ultima supposizione

$(1+ax+bx^2+cx^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$

$+ \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \; . \; 2} a^2 x^2 + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1 \; . \; 2 \; . \; 3} a^3 x^3 + \ldots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} a^2 x^2 \qquad + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \; . \; 2} 2abx^3 \qquad + \ldots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} c^3 x^3 \qquad + \ldots$ ec.

ed

ed $A = \frac{m-1}{1} a$

$B = \frac{m-2}{2} a A + \frac{2m-2}{2} b$

$C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A + \frac{3m-3}{3} c$

$N = \frac{m-n}{n} a M + \frac{2m-n}{n} b L + \frac{3m-n}{n} c K$

11. Quindi si ha generalmente per l'infinitinomio

$(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \text{ec.})^{m-1} = 1 + Ax$

$+ Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ ec.; ed

$A = \frac{m-1}{1} a$

$B = \frac{m-2}{2} a A + \frac{2m-2}{2} b$

$C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A + \frac{3m-3}{3} c$

$D = \frac{m-4}{4} a C + \frac{2m-4}{4} b B + \frac{3m-4}{4} c A + \frac{4m-4}{4} d$

$E = \frac{m-5}{5} a D + \frac{2m-5}{5} b C + \frac{3m-5}{5} c B + \frac{4m-5}{5} d A + \frac{5m-5}{5} e$

.... ec.

12. E' facilissimo l'uso di questa formola per la formazione delle potenze. Si riduca la quantità data ad avere l'unità per primo termine, come s'è fatto al num. 9.; si paragonino i coefficienti della lettera x, che distingue i termini nella quantità data

data coi coefficienti della formola $1+ax+bx^2$ . . . ec., si sostituisca nelle formole di A, B, C . . . . il valore di m, e di a, b, c . . . ec.

13. Nella formola medesima si noti: 1.º Che il coefficiente N viene determinato dai coefficienti di tanti termini della quantità data, quante sono le lettere a, b, c . . . . delle quali è composto $\frac{Q}{P}$; fatto $\frac{Q}{P}=ax$, l'N è determinato dal precedente termine M; fatto $\frac{Q}{P}=ax+bx^2$, l'N è determinato da due precedenti termini L, M.

2.º Che le particolari formole di A, B, C, D, E . . . ec., si possono continuare all' infinito; E' chiara la legge, che vi regna: Nella colonna de' primi termini l'm è sminuito successivamente di $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . n$, cioè de' numeri della serie naturale; il divisore di $m-n$ è sempre n; le lettere piccole nella prima colonna sono tutte a, nella seconda sono sempre b, nella terza c; . . . coll' ordine alfabetico, ed in ciascuna colonna il primo termine è senza lettere majuscole, il secondo contiene l'A, il terzo B, il quarto C . . . . parimenti coll' ordine alfabetico.

14. Si noti finalmente, come di passaggio, che la serie de' coefficienti $\frac{\overline{m-1}}{1}$; $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}$; $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ . . . . ec. scioglie compiutamente il problema, tanto usato nell' algebra, delle combinazioni. Data qualunque moltitudine $m-1$ di lettere a; b; c; d . . . ec. trovare quanti diversi prodotti di due, di tre, di quattro . . . . . lettere si possono formare. E' evidente, che facendo il prodotto di ciascuna lettera in ciascuna delle altre, ciascuna lettera entra ne' prodotti un egual numero di volte, e che dovendosi ciascuna lettera multiplicare per ciascuna delle altre, e non per se stessa, ciascuna lettera entra ne' prodotti

dotti un numero di volte $m-2$; ma ogni prodotto verrà due volte, giacchè $pq = p \times q = q \times p$; quindi i prodotti delle lettere, ne' suoi diversi binari saranno $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \;.\; 2}$;

Così pure per avere i ternari è necessario multiplicare ogni binario per tutte le altre lettere toltene le sue due, e verrà tre volte lo stesso prodotto, quando per qualunque delle sue tre lettere si multiplicherà il residuo suo binario, onde il numero de' prodotti a tre a tre, sarà $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1 \;.\; 2 \;.\; 3}$;

similmente il numero de' prodotti a quattro a quattro, sarà $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.\overline{m-4}}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4}$, e così nelle altre combinazioni. Onde il coefficiente del termine $n+1$ nella formola del binomio esprimerà il numero de' prodotti, o delle combinazioni d'un numero qualunque di lettere prese n ad n.

Evoluzioni delle quantità radicali.

15. Torniamo alle proposte formole. Non servon esse solamente a svolgere in serie le quantità finite, o infinitinomie della forma $(a+b)^{m-1}$, oppure $(1+ax+bx^2+cx^3 \ldots \text{ec.})^{m-1}$; anche le quantità radicali si sottopongono facilmente alle formole medesime, essendosi dimostrato nell' introduzione, che $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$; Si faccia $m-1 = \frac{r}{s}$, e si divida a in due parti $P+Q$; non vi sarà maggiore difficoltà nell' estrarre le radici, che nel formare le potenze. Resta a dimostrarsi, che le formole abbian luogo, qualunque sia il numero $m-1$.

S'è già veduto il caso, in cui $m-1$ sia un numero intero positivo. Se $m-1$ è numero rotto positivo rappresentato da $\frac{r}{s}$, e ridotto a minimi termini: Si alzi, per mezzo della formola, la data quantità $1+x$ alla potenza $\frac{r}{s}$; si avrà una quantità disegnabile per $1+z$: dunque se questa è eguale ad $(1+x)^{\frac{r}{s}}$, elevando ciascuna alla potenza s si avrà $(1+z)^s = (1+x)^r$: ora, facendo il calcolo, che veramente è longhissimo, si trovano identiche queste espressioni.

Se $m-1$ è numero intero, o rotto negativo; Si rappresenti per $-\frac{r}{s}$, e si avrà $(1+x)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$; Si trovi: 1.° Il valore di $(1+x)^{-\frac{r}{s}}$, supponendo a ciò buona la formola delle potenze; si avrà $1+z$.

2.° Si trovi colla medesima formola il valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$; Sostituendo questo valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$ al denominatore di $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$, dovrebbe essere $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}} = 1+z$; $\frac{1}{(1+x)^r} = (1+z)^s$, ed $(1+x)^r\,(1+z)^s = 1$, come pure farà vedere il calcolo.

16. Applichiamo la formola ad un esempio. Si cerchi la radice seconda di $a^2 + 2ab + b^2$; Si avrà $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$
$= (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}}$

1.°

1.° $m-1=\frac{1}{2}$

$m-2=-\frac{1}{2}$

$m-3=-\frac{3}{2}$

... ec.

2.° $\frac{\overline{m-1}}{1}=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\;.\;2}=-\frac{1}{8}$

$\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\;.\;2\;.\;3}=\frac{1}{16}$

... ec.

3.° $P \quad =a^2$

$P^{m-1}=a$

$P^{m-2}=\frac{1}{a}$

... ec.

4.° $\mathfrak{Q} \quad =2ab+b^2$

$\mathfrak{Q}^2 \quad =4a^2b^2+4ab^3+b^4$

$\mathfrak{Q}^3 \quad =8b^3a^3+12b^4a^2+6b^5a+b^6$

... ec.

Multiplicando i termini corrispondenti, si ha

$$a+b+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^2}{2a}+\ldots \text{ ec.}$$

Sembra a prima giunta, che questa serie non esprima il vero valore della radice cercata, che, come a tutti è noto, dovrebbe essere $a+b$; ma, facendovi un po di riflessione, si vede manifestamente l'identità di queste due espressioni. Nella proposta serie i termini, che vengon dopo i primi due, si elidono vicendevolmente. Il termine $\frac{b^2}{2a}$, viene eliso dal seguente $-\frac{b^2}{2a}$, e così nel resto; onde la serie si riduce ad $a+b$.

17. Si noti; 1.° Che ciocchè s'è detto della prima formola delle potenze, vale ancora per l'altra più generale delle quantità infinitinomie.

 2.° Che

2.° Che le serie dedotte da queste formole sono serie finite quando $m - 1$ è un numero intero positivo.

3.° Che negli altri casi si hanno sempre serie prodotte all'infinito, o almeno sotto una forma di termini infiniti.

Altro metodo per l'Evoluzione de' radicali.

18. Sia A la data quantità radicale di grado $m - 1$; C la sua radice prossima; E la parte sconosciuta, che si dovrebbe aggiungere a C per avere la radice esatta.

Sarà $A = (C + E)^{m-1} = C^{m-1} + \frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$ $C^{m-3} E^2 + \ldots$ ec.; trascurando tutti i termini, che contengono E alzato ad una potenza maggiore di E^2, si avrà

$$A = C^{m-1} + \frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} C^{m-3} E^2 .$$

D'onde $\frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} C^{m-3} E^2 = A - C^{m-1} = B.$

Si divida quest'ultima equazione, 1.° per $\overline{m-1}\; C^{m-2}$.

2. Per $\overline{m-1}\; C^{m-2} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} C^{m-3} E$; si avrà dalla prima divisione $\frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-2}}$ maggiore di E della picciolissima frazione $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,C^{m-3} E^2}{2\,\overline{m-1}\,.\,C^{m-2}} = \frac{\overline{m-2}\,.\,E^2}{2C}$; e dalla seconda si avrà $E = \frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-2} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} C^{m-3} E}$; e sostituendo al

deno-

denominatore del fecondo membro il primo valore di E; fi avrà

$$E = \overline{m-1}\,.\,C^{m-2} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\;C^{m-3}\,B}{2\,.\,\overline{m-1}\,.\,C^{m-2}}$$

$$= \frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-2} + \frac{\overline{m-2}\,.\,B}{2\,C}};$$

e multiplicando per C i termini di quefta frazione, fi ha

$$E = \frac{B\,C}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-1} + \frac{m-2}{2}\,.\,B}$$ da aggiungerfi a C.

Tre altre formole per la Evoluzione de' radicali.

19. SI divida la feconda equazione del num. precedente per il coefficiente di E^2, fi compifca il quadrato (num. 5.), e fi fciolga l'equazione, che ne rifulta; fi avrà

$$E^2 + \frac{2}{m-2}\,C\,E = \frac{2\,B}{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,C^{m-3}},$$

ed $E = -\frac{1}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2}{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}} \cdot \frac{B}{C^{m-3}}}$;

e facendo $\frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-3}} = D$, farà

$$E = -\frac{1}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2\,D}{m-2}}\,.$$

20. Si aggiunga C all' ultima equazione del num. precedente, fi avrà $C + E = \frac{m-3}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2\,D}{m-2}}$.

21. Di-

21. Dividendo per $\frac{m-1}{1}C^{m-1}$ la terza equazione del num. 18., si ha $CE + \frac{m-2}{2}E^2 = D$; ossia $(C + \frac{m-2}{2}E)E = D$; donde $E = \frac{D}{C + \frac{m-2}{2}E}$.

22. Sulle precedenti formole si noti in generale: 1.° Che esse si applicano egualmente a numeri, che alle quantità algebraiche.

2.° Che le formole irrazionali, cioè quelle, che contengono qualche parte radicale non sono buone, che pe' gradi più elevati del secondo.

3.° Che le radici razionali danno una radice approssimata minore della vera, e le irrazionali la danno maggiore; più però s'accostano queste al vero valore, che non quelle.

4.° Che fatta una determinazione di E, se ne può fare una seconda, una terza, e così all' infinito; basta chiamare C la radice già trovata per mezzo delle formole, quindi determinare un nuovo B.... così si correggerà l'errore, per cui nessuna delle formole precedenti dà la radice esatta, cioè l'avere da principio negligentati i termini, in cui E ha più di due dimensioni.

5.° Le formole saranno tante più esatte, quanto più il C s'accosterà alla radice vera; Quindi ne' numeri si prende assai volte per primo C il numero prossimamente maggiore della radice della massima potenza. Ciò si fa quando il numero dato è più vicino ad una potenza maggiore, che ad una minore alla data; l'operazione mostrerà in questi casi le variazioni, che si devono fare ne' segni.

6.° Sostituendo nelle precedenti formole i valori di m per i diversi gradi di radici, si stenderanno facilmente delle tavole uti-

li,

li, o delle particolari formole per tutti i casi. Dalla formola del num. 20. si deducono tutte le formole proposte dall' Allejo per l'estrazione, ed approssimazione delle radici.

Ultimo metodo per la Evoluzione de' radicali.

23. QUesto è il più semplice ad enunciarsi, ed a mettersi in pratica. Si estragga col metodo esposto nell' introduzione, la radice della potenza massima, che sta nascosta nella quantità data; Si continui ad operare sull'ultimo residuo collo stesso metodo, unendo al calcolo delle quantità intere anche quello delle frazioni.

Per la quantità $\sqrt{a^2 \pm x^2}$; prendo la radice quadrata di a^2, che è a, e la scrivo accanto ad $a^2 \pm x^2$; sottraggo il quadrato di a, cioè a^2, da $a^2 \pm x^2$; resta $\pm x^2$. Divido $\pm x^2$ per il doppio del primo termine della radice, e trovo per secondo termine $\pm \frac{x^2}{2a}$. Multiplico $\pm \frac{x^2}{a^2}$ per $2a \pm \frac{x^2}{a^2}$, e sottraggo il prodotto $\pm x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$ da $\pm x^2$; resta $- \frac{x^4}{4a^2}$. Divido questo residuo per il doppio di $a \pm \frac{x^2}{2a}$, e trovo, per terzo termine della radice, $- \frac{x^4}{8a^3}$. Continuando allo stesso modo l'operazione, avrò un numero indefinito di termini, cioè una serie infinita, che esprimerà il valore di $\sqrt{a^2 \pm x^2}$

$$\begin{array}{l} a^2 \pm x^2 \;\Big)\; a^2 \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \ldots\ldots \text{ec.} \\ -a^2 \\ \hline \pm x^2 \\ \mp x^2 - \frac{x^4}{4a^2} \\ \hline - \frac{x^4}{4a^2} \\ \ldots\ldots \text{ec.} \end{array}$$

24. Se la proposta quantità fosse $\sqrt{x^2 \pm a^2}$; colle stesse operazioni si avrebbe $x \pm \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \pm \frac{a^6}{16x^5} - \frac{a^8}{128x^7} \pm \ldots$ ec.

25. Se a^2 è maggiore di x^2 sarà più convergente la serie del num. 23.; Se x^2 è maggiore di a^2, sarà più convergente la serie del num. 24.; Se a^2 è eguale ad x^2, amendue le serie saranno paralelle. Col medesimo metodo si ridurranno in serie le radicali trinomie, quadrinomie... ec.

Applicazione de' metodi precedenti alle quantità numeriche.

26. Tra tutte le formole spiegate sopra per l'evoluzione delle quantità radicali, scelgo ad applicare a' numeri interi quella del num. 21., perchè mi sembra più difficile delle altre. Con questa formola si fa l'estrazione di qualunque radice da qualunque numero per mezzo della semplice divisione, maneggiata però con qualche particolare artificio. Spiegherò in prima le preparazioni necessarie per ridurre qualunque dato numero ad essere un dividendo capace di dare co' quoti di ciascuna operazione ciascuna figura della radice, che si cerca; spiegherò in secondo luogo quali essere debbano i membri della

della divisione; in terzo luogo quale divisore, e quale minutore si debba prendere in ciascuna operazione.

Preparazioni. 1.° Il numero dato A si separi da destra a sinistra in classi di tante figure ciascuna, quante sono unità nell' esponente della radice cercata; l'ultima classe, cioè quella, che sta più a sinistra, non importa, che sia composta d'un minor numero di figure, del quale lo sono le altre, anche da una sola.

2.° Si estragga (Tav. 1.ª) dall' ultima classe la radice vera, o prossimamente minore della cercata; essa sarà la prima parte, ossia la più alta figura della radice cercata.

3.° Si sottragga dall' ultima classe del dato numero A la potenza della radice trovata, d'esponente eguale all' esponente della radice cercata; si chiami B il residuo.

4.° Si premettano verso la destra della parte radicale trovata tanti zeri, quante sono le classi del dato numero, una meno; si chiami C il prodotto.

5.° Si alzi C alla potenza d'esponente eguale all' esponente della radice cercata meno due unità, e per il prodotto di questa potenza multiplicata per l'esponente della radice cercata si divida B; il quoto sarà il cercato dividendo D.

$$D = \frac{B}{\overline{m-1}\, C^{m-3}} \ldots\ldots B = A - C^{m-1}$$

Membri della divisione. Si separi da destra a sinistra il dividendo D, come nelle radici quadrate; la prima classe a sinistra meno l'ultima figura della classe medesima sarà il primo membro della divisione: Il residuo del minutore sottratto da tutta intera questa prima classe, con la classe, che immediatamente la segue verso la destra (meno l'ultima figura) sarà il secondo membro della divisione, e così nel resto fino a comprendere in qualche membro di divisione tutte le classi del dividendo una ad una, come nell' ordinaria divisione.

Divisori. Si prenda sempre nell' operazione seguente per divisore tutto intero il numero radicale E trovato colle precedenti divisioni; il primo divisore però sarà in qualunque estrazione di radici la prima parte trovata nella preparazione di A.
Minutori. Si multiplichi il quadrato di E per l'esponente della radice cercata sminuito d'un' unità; alla metà del prodotto si aggiunga il decuplo del divisore multiplicato per E; si avrà il minutore M.

$$M = C E + \frac{m-2}{2} E^2$$

Esempio. Si cerchi la radice quarta di 27.9841 ... A. La radice quarta della prima classe 27 è 2; sotrraendo $(2)^4$ da 27, si ha per residuo 11, che congiunto all' altra classe da 119841 ... B; mettendo un zero avanti alla prima parte radicale 2 a ragione del numero delle classi, si ha 20 ..... C. La potenza d'esponente $4-2$ di C è 400, che multiplicata per 4 esponente della radice da 1600; e dividendo B per 1600, si ha 74, 9 ... D. Dividendo la classe 74 meno la prima figura 4, cioè dividendo 7 per la trovata figura radicale 2, si ha per quoto 3 .... E e quindi $CE = 60$

$$\frac{m-2}{2} E^2 = \frac{27}{2}$$

$$\text{cioè } M = 60 + \frac{27}{2} = 73, 5$$

da sottrarsi dall' intera classe 74; il residuo 0, 5 congiunto colle altre figure 0, 90, cioè 1, 4 è da trascurarsi.

27. Questo residuo da trascurarsi, è la maggiore difficoltà, che s'incontri nell' applicazione a' numeri della nostra formola. Per quale ragione s'ha a trascurare l'ultimo residuo? e se si deve trascurare, perchè mai s'ingiunge di fare l'ultima sottrazione, coll' inutile calcolo di trovare l'ultimo valore di M? Fa an-

ancora sorpresa il vedere, che cercando col nostro metodo le radici de' quadrati perfetti si ha sempre zero per residuo, e nelle altre potenze di grado più elevato, e comunque perfette, si ha sempre un residuo maggiore del zero. Ma si rifletta 1.° alla natura de' minutori, che si adoperano in ciascuna operazione. Nelle radici quadrate D è rigorosamente eguale ad M; cioè $D = M$, donde $D - M = 0$; ma nelle altre radici qualunque, anche di potenze perfette, D è eguale ad M, ed a qualche cosa di più; a cagione d'esempio: Se $m - 1 = 4$ come nel caso nostro, sarà $D = \left(C + \frac{3}{2} E\right) E + \frac{E^3}{C} \div \frac{E^4}{4C^2} = M + \left(E + \frac{E^2}{4C}\right) \frac{E^2}{C^2}$;

perciò è, che sottraendo da D il solo M, non si sottrae tutta quella quantità, che sola potrebbe rendere il residuo eguale a zero.

Si rifletta in 2.° luogo, che il più delle volte non si prende per D l'esatto valore di $\frac{B}{\overline{m-1}\, C^{m-3}}$, ma un valore approssimato in decimali; come nell'esempio addotto s'è preso per D il numero 74, 9, quando dovrebbe essere 74, $9\frac{1}{16}$; quindi, comunque il minutore fosse sempre esatto, non si avrebbe sempre zero per residuo, dovendosi perciò sottrarre l'esatto minutore $M + N$ da un esatto D. Di fatti correggendo nel nostro esempio queste due origini d'errore, si avrà zero per residuo

$D = 74, 9\frac{1}{16}$ ..... $M = 73, 5$

$E = 3$ $\quad\quad$ $N = 1, 4\frac{1}{16}$

$C = 20$

donde $D = M + N$, cioè $74, 9\frac{1}{16} = 73, 5 + 1, 4\frac{1}{16}$

 Quan-

Quanto all' ultima sottrazione; essa non è inutile come sembra a primo aspetto. Si fa quest' ultima sottrazione per vedere se l'ultima figura radicale è maggiore del giusto: Suppongo, che nelle figure radicali si mettano sempre i quoti massimi delle particolari divisioni, e perciò, se si veda, che il minutore è maggiore del membro intero della divisione, si avrà un segno sicuro che la figura radicale E, che lo ha prodotto, dovrà sminuirsi d'un' unità, di due, di tre...., finchè M non sia maggiore del membro della divisione.

28. Non va dissimulato un notabile incomodo di questo metodo, comunque egli sia assai semplice, e spedito, e perciò degno d'essere preferito ad ogni altro. Negli altri metodi, se si ha zero per ultimo residuo, egli è certo, che il dato numemero è potenza perfetta di grado dato; se si ha un residuo maggiore di zero, il numero dato è veramente una potenza imperfetta: Nel nostro, fuori della quadrata, si ha in qualunqne estrazione di radici qualche residuo maggiore del zero, se non si corregge il D, e l'M con lunghi calcoli, ed il mezzo più semplice, ma pur nojoso, per vedere se il dato numero è potenza perfetta, o no, è d'alzare la radice trovata alla potenza di grado dato, e se questa potenza A' sarà eguale al dato numero, il dato numero sarà potenza perfetta, altrimenti no.

29. Quando A sia una potenza imperfetta: 1.° Si sottragga A' da A, e sarà $A - A' = B'$, ed operando sopra questo secondo B, come s'è fatto sul primo (prendendo per C la radice trovata), si avrà una nuova approssimazione alla radice vera, massime aggiungendo a B' varj zeri per figure decimali.
2.° Se venga limitato il numero delle figure da aversi nella radice approssimata, non è necessario cercarle tutte col metodo esposto, ma solamente fino ad una figura di più della metà del numero determinato di figure; per trovare poi le altre, basta l'ordinaria divisione dell' ultimo residuo colla radice trovata. Si

cer-

cerchi la radice quadrata di 7, con dodici figure: Col metodo ſpiegato ſi troveranno le prime ſette figure 2, 645751, coll' ultimo reſiduo 822997; ſi divida queſt' ultimo reſiduo per la radice trovata, fino ad avere cinque figure, ſi avrà per quoto 31106, e la radice ſeconda di 7, ſarà 2, 64575131106. Queſta è una elegante proprietà del noſtro metodo.

30. In ogni evoluzione de' radicali numerici, c' entrano adunque tre quantità; B, D, M.

Per il ſecondo grado... $B = A - C^2$

$$D = \frac{B}{2C^0} = \frac{1}{2}B$$

$$M = \left(C + \frac{1}{2}E\right)E$$

Per il terzo grado ..... $B = A - C^3$

$$D = \frac{B}{3C}$$

$$M = (C + E)E$$

Per il quarto grado.... $B = A - C^4$

$$D = \frac{B}{4C^2}$$

$$M = \left(C + \frac{3}{2}E\right)E$$

.... ec.

E' facile a vederſi la legge di tutti i B, C, M; a cagione d'eſempio negli M ſi diſtinguono due parti; la prima è ſempre CE; e per la ſeconda parte conviene ſeparare gli M in due claſſi di radici; cioè le radici d'eſponente pari, come la ſeconda, la quarta, la ſeſta....., e le radici d'eſponente impari, come la

terza,

terza, la quinta, la settima..... Nelle radici della prima classe la seconda parte del minutore è sempre $\frac{1}{2}$ E^2 multiplicato per un termine della serie impari 1.3.5.7... ec.; Nelle radici della seconda classe, la seconda parte del minutore è sempre E^2 multiplicato per un termine della serie naturale 1.2.3... ec., secondo l'ordine de' gradi, o degli esponenti del dato radicale. Bastano le riflessioni fatte sulla formola del num. 21. per fare comprendere il modo d'applicare le altre formole algebraiche ai numeri.

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte.

31. A Due forme, e non più, si riducono tutte le equazioni composte; altre hanno la forma $x^{m-1}=A$, e si chiamano equazioni *non affette* d'altri termini; altre hanno la forma $ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots$ ec.$=A$, e si chiamano equazioni affette. L'equazioni di primo genere si sciolgono coll'estrazione delle radici, avendosi $x=\sqrt[m-1]{A}$; per le altre, oltre ai metodi esposti nella introduzione, se ne deduce uno assai semplice dai metodi precedenti.

Si prenda ad arbitrio qualunque quantità C; se questa sarà una radice di x, si avrà $aC+bC^2+cC^3+\ldots$ ec. $=A$; se $aC+bC^2+\ldots$ ec. sarà maggiore di A, quel primo C sarà maggiore della radice cercata, e se sarà minore di A, quel primo C sarà minore della radice medesima: Nel primo caso si dovrà sottrarre da C una quantità E, e nel secondo si dovrà aggiungere a C la quantità medesima E, e nel primo caso sarà $x=C-E$, nel secondo sarà $x=C+E$. Ci rimane adunque di trovare in amendue i casi il valore di E; cerchiamolo nel secondo caso, ed il metodo si adatterà da se stesso al caso primo.

1.° Se

1.° Se $C+E$ è il vero valore di x, si avranno le seguenti equazioni.

$$\text{I. } ax = aC + aE$$

$$\text{II. } bx^2 = bC^2 + 2bCE + bE^2$$

$$\text{III. } cx^3 = cC^3 + 3cC^2E + 3cCE^2 + cE^3$$

$$\text{IV. } dx^4 = \ldots \text{ ec.}$$

2.° Trascurando i termini, in cui E ha più di due dimensioni, si avrà

$$\begin{array}{l} aC + aE + bE^2 = A \\ bC^2 + 2bCE + 3cCE^2 \\ cC^3 + 3cC^2E + \ldots \text{ ec.} \\ \ldots \text{ec.} + \ldots \text{ ec.} \end{array}$$

3.° Facendo eguale ad l il primo termine cognito, la somma de' coefficienti di E eguale ad m, e la somma de' coefficienti di E^2 eguale ad n, si avrà $l + mE + nE^2 = A$, ed $nE^2 + mE = A - l = B$; dividendo quest' equazione per n, ed estraendo le radici, si ha $E = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nB.}}{2n}$

32. Si divida l'equazione $nE^2 + mE = B$, 1.° per m; 2.° per $m + nE$;

Si avrà, 1.° $E = \frac{B}{m}$, trascurando $\frac{n}{m}E^2$;

2.° $E = \frac{B}{m + nE}$; cioè, sostituendo in quest' ultima equazione il valore di E della prima, si avrà $E = \frac{B}{m + \frac{nB}{m}}$, e multipli-

plicando per m i termini di questa frazione, sarà $E = \frac{mB}{m^2 + nB}$.

33. Su questi valori approssimati di E per le equazioni affette si facciano riflessioni simili a quelle, che si sono fatte sui valori di E per le equazioni non affette, o per l'evoluzione de' radicali. E' evidente inoltre, che quanto sarà C più vicino al vero valore di x, sarà più convergente il metodo: Per avere con facilità un valore approssimato di x da prendersi per C fino dalla prima operazione, espongo il metodo per trovare i limiti delle radici d'un' equazione.

Per l'equazione $x^2 + px - q = 0$, sarà 1.° $x^2 + px = + q$

$$px < + q$$

$$x < + \frac{q}{p}$$

2.° $x^2 < + q$

$$x < \sqrt{q}$$

$$x^2 < x\sqrt{q}$$

$$x^2 + px < x\sqrt{q} + px$$

3.° $q < x\sqrt{q} + px$

$$q < (\sqrt{q} + p)x$$

$$\frac{q}{\sqrt{q} + p} < x$$

cioè i limiti delle radici saranno $\frac{q}{p}$, e $\frac{q}{\sqrt{q} + p}$; il primo maggiore, il secondo minore del valor vero. Allo stesso modo si troveranno i limiti dell' equazione $x^2 - px + q = 0$, $p\ \frac{q}{p}$, ed i limiti dell' equazione $x^2 - px - q = 0$, $p + \sqrt{q}$, e $\sqrt{p^2 + q}$;

e così

e così nel resto per le equazioni di grado più elevato del secondo. Nell' equazione $x^2 - 5x - 31 = 0$, i limiti sono $\sqrt{56}$, e $5 + \sqrt{31}$, il primo minore, il secondo maggiore di x; Onde per applicarvi le formole si prenda $C = 8$, e si troverà dopo due periodi d'operazioni, cioè determinati da E, $x = 8,6032\ldots$ ec.

34. Per non avere la noja di calcolare i radicali, e le frazioni, che in questo metodo d'approssimazione s'incontrano non di rado, si sciolga ogni frazione, ed ogni radicale in numeri decimali, come nell' aritmetica comune. E' stato Newton il primo, che ha introdotti i decimali nelle equazioni con impareggiabile compendio, e facilità delle operazioni più intralciate.

CAPO SECONDO.

Serie, che nascono dalle frazioni Algebraiche.

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni Algebraiche.

35. Il primo metodo per svolgere in serie una frazione qualunque $\frac{a^2}{b \pm x}$, è l'ordinaria divisione algebraica. Dividendo a^2 per b, si ha per primo termine della serie $\frac{a^2}{b}$; sottraendo da a^2 il prodotto $\frac{a^2}{b} \times (b \pm x)$, si ha per residuo $\mp \frac{a^2 x}{b}$; dividendo questo residuo per b, si ha per secondo termine della serie $\mp \frac{a^2 x}{b^2}$, e procedendo con quest' ordine, si avrà la serie

$$\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} \mp \frac{a^2 x^3}{b^4} + \ldots \text{ ec.} = A.$$

Se la frazione fosse $\frac{a^2}{x \pm b}$, sarebbe la serie a lei eguale

$$\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2} + \frac{a^2 b^2}{x^3} \mp \frac{a^2 b^3}{x^4} + \ldots \text{ ec.} = B.$$

36. Se nella serie A sia x minore di b, cosicchè $\frac{x}{b}$ sia una frazione propria, la serie A sarà convergente; dacchè b, e le potenze di b stanno al denominatore della serie, e sempre più elevate d'un grado, che l'x del numeratore; ciocchè rende successivamente minori i termini seguenti rispetto ai precedenti; ciò si

ſi comprenderà meglio ſe alla ſerie A ſi dia la forma equivalente

$$\left(\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \ldots \text{ ec.}\right);$$

Per la ragione contraria ſi proverà, che ſe $x < b$, la ſerie B ſarà divergente, maſſime ſe ſi riduca alla forma

$$\left(\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} \ldots \text{ ec.}\right);$$

Collo ſteſſo metodo ſi potranno dedurre le ſerie equivalenti alla data frazione, poſto $b = x$; in queſto caſo ſarà meglio mutare la forma al denominatore, per non avere delle ſerie, o illuſorie, o falſe.

Secondo Metodo.

37. Si ſvolgono in ſerie le frazioni algebraiche colla formola delle potenze d'un binomio; E' evidente, che $\frac{a^2}{b \pm x}$ $= a^2 (b \pm x)^{-1}$; ſi faccia $m - 1 = -1$, cioè $m = 0$, $P = b$, $Q = x$, e ſi avrà $(b \pm x)^{-1} = 1 \mp b^{-1} x + b^{-2} x^2 \mp \ldots\ldots$ ec., e multiplicando i termini di queſta ſerie per a^2, ſi avrà la ſerie A del num. 35.. Si dica lo ſteſſo negli altri caſi.

38. E' evidente, che i due metodi precedenti ſi applicano del pari alle frazioni di termini comunque compleſſi; invece di uſare la formola del binomio, riuſcirà più ſpedito il calcolo per molte frazioni colla formola dell'infinitinomio, ma creſcerà ſempre la complicazione del calcolo col creſcere i termini delle quantità compleſſe, che ſi mettano al numeratore, o al denominatore delle date frazioni. Paſſo a ſpiegare un altro metodo più elegante, con cui agevolmente ſi coſtruirà una tavola per le frazioni di termini infinitinomi.

39. Sia data la frazione $\frac{a}{b+cx}$; Si supponga $\frac{a}{b+cx}=A$ $+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots$ ec., restano a determinarsi i coefficienti A, B, $C\ldots$ ec. Multiplicando l'equazione per $b+x$, si ha

$$a=bA+bBx+bCx^2\ldots\text{ ec.}$$
$$+cAx+cBx^2\ldots\text{ ec.},$$

e paragonando i termini corrispondenti ne' due membri di questa equazione, si ha

$$bA=a$$
$$bB+cA=0$$
$$bC+cB=0$$
$$\ldots\text{ ec.}$$

Dalla prima equazione si ha $A=\frac{a}{b}$; con questo valore di A, e colla seconda equazione, si ha $B=-\frac{ca^2}{b^2}$, e quindi colla terza $C=\ldots$ ec.; cioè con quelle equazioni di primo grado si determineranno i coefficienti cercati, e dopo tre, o quattro determinazioni si vedrà la legge della serie, e si avrà

$$\frac{a}{b+cx}=\frac{a}{b}\times\left(1-\frac{c}{b}x+\frac{c^2}{b^2}x^2-\frac{c^3}{b^3}x^3\ldots\text{ ec.}\right)$$

40. Considerando attentamente i termini di questa serie, si ha il coefficiente Q di qualunque termine, dato il coefficiente P del termine precedente, essendo $Q=\frac{cP}{b}$, ed avendosi sempre $A=\frac{a}{b}$, si avranno successivamente tutti gli altri. Anzi il coefficiente

ciente di qualunque termine x^n è eguale a $\pm\frac{a c^n}{b^{n+1}}$; il $+$ è per l'n numero pari, il $-$ è per l'n impari, e generalmente il coefficiente di x^n è $\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}\right)^n$

41. Applicando il medesimo metodo alle frazioni di denominatori trinomj; dati P, Q coefficienti di due termini, si avrà il coefficiente del seguente termine, cioè

$R = -\frac{cQ + dP}{b}$; per i denominatori quadrinomj, sarà

$S = -\frac{cR + dQ + eP}{b}$; cioè si ha il coefficiente S dati i coefficienti de' tre termini precedenti, e facendo

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots \text{ ec.}}{1 - gx - hx^2 - ix^3 \ldots \text{ ec.}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$+ Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + Sx^{n+3} \ldots\ldots$ ec. Si ha

$A = a$

$B = gA + b$

$C = gB + hA + c$

$D = gC + hB + iA + d$

$E = gD + hC + iB + lA + e$

$\ldots\ldots$ ec.

E' chiara la legge di questa serie: i coefficienti della prima colonna sono sempre g, della seconda h, della terza $i\ldots\ldots$ coll' ordine alfabetico g, h, i, l, $m\ldots$ ec.; le lettere majuscole stanno in ciascuna colonna coll' ordine alfabetico A, B, C, $D\ldots$ ec., e coll' ordine alfabetico si succedono gli ultimi termini delle colonne a, b, c, $d\ldots$ ec.

42. Se

42. Se la frazione aveſſe la forma $\frac{a + b x + c x^2 \ldots + b x^m}{(1 - i x)^{m+1}}$;

Si avrà collo ſteſſo metodo il coefficiente del termine diſtinto da x^n nella ſerie indeterminata.

per $m = 1$

$$\frac{n+1}{1} i^n a + \frac{n}{1} i^{n-1} b$$

per $m = 2$

$$\frac{\overline{n+1} . \overline{n+2}}{1 . 2} i^n a + \frac{n . \overline{n+1}}{1 . 2} i^{n-1} b + \frac{n . \overline{n-1}}{1 . 2} i^{n-2} c$$

per $m = 3$

$$\frac{\overline{n+1} . \overline{n+2} . \overline{n+3}}{1 . 2 . 3} i^n a + \frac{n . \overline{n+1} . \overline{n+2}}{1 . 2 . 3} i^{n-1} b$$
$$+ \frac{n . \overline{n-1} . \overline{n+2}}{1 . 2 . 3} i^{n-2} c + \frac{n . \overline{n-1} . \overline{n-2}}{1 . 2 . 3} i^{n-3} d$$

per $m = 4$

. . . . ec.

43. E più generalmente ancora, ſe la frazione avrà la forma

$$\frac{1}{(1 - a x - b x^2 - c x^3 - \ldots \text{ ec.})^{m+1}}$$

ciaſcun coefficiente S ſi determinerà da' coefficienti di tanti termini precedenti, quante ſono le lettere a, b, c, d; e ſi avrà

$$S = \frac{m+n}{n} a R + \frac{2m+n}{n} b Q + \frac{3m+n}{n} c P + \frac{4m+n}{n} d O + \ldots \text{ ec.}$$

44. Si noti, che ſe il primo termine del denominatore della data frazione non foſſe un termine conoſciuto, come ſempre abbiamo ſuppoſto fin qui, colla ſemplice diviſione ſi ridurrà alle formole ſpiegate.

Sia,

Sia, a cagione d'esempio, data la frazione $\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ ec.}}{fx-gx^2-hx^3 \ldots \text{ ec.}}$ $=Z$; si avrà $Z=\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ ec.}}{x(f-gx-hx^2 \ldots \text{ ec.})}$; e determinato $A+Bx$ $+Cx^2+\ldots$ ec. $=\frac{a+bx+cx^2 \ldots \text{ ec.}}{f-gx-hx^2 \ldots \text{ ec.}}$; sarà $Z=\frac{1}{x}(A+Bx$ $+Cx^2+\ldots$ ec.); E' manifestò il modo di ridurre il denominatore ad avere per primo termine l'unità, quando prima siasi ridotto ad avere per primo termine una quantità costante.

Spezzamento delle frazioni.

45. Sia la frazione $\frac{a+x^n}{(e+fx)^p\,(g+hx)^q\,(k+lx)^r \ldots \text{ ec.}}$, ed n $<(p+q+r+\ldots$ ec.)

1.° Si supponga la data frazione rappresentata da

$$\frac{A+Bx+Cx^2 \ldots\ldots+Fx^{p-1}}{(e+fx)^p}+\frac{G+Hx+Ix^2 \ldots+Mx^{q-1}}{(g+hx)^q}$$
$$+\frac{N+Px+Qx^2 \ldots+Tx^{r-1}}{(k+lx)^r}+\ldots \text{ ec.}$$

2.° Multiplicando la proposta equazione, e la frazione indeterminata, per il denominatore della proposta, si ha

$$a+x^n=(A+Bx+Cx^2 \ldots+Fx^{p-1})\,(g+hx)^q\,(k+lx)^r \ldots$$
$$+(G+Hx+Ix^2 \ldots\ldots Mx^{q-1})\,(e+fx)^p\,(k+lx)^r \ldots+\ldots \text{ ec.}$$

3.° Ordinando il secondo membro dell'equazione per x, e paragonando i termini de' due membri, si avranno tante equazioni, quante sono le lettere indeterminate A, $B\ldots$ ec. donde si avranno

no i valori di A, B, C.... da sostituirsi nella frazione indeterminata.

Esempio. Nella frazione $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}$, dovendosi pel metodo prendere tanti termini del numeratore indeterminato, quante sono unità nell'esponente di z del dato fattore, si ha

$\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z}$; e multiplicando l'equazione per il prodotto de' dati fattori, si ha

$$
\begin{aligned}
1+z^2 = & -Az^2 + Bz + A. \\
& + Bz^2 + Cz \\
& - Cz^2
\end{aligned}
$$

paragonando i termini de' due membri di quest'equazione, si ha

$$
\begin{aligned}
A &= 1 \\
B + C &= 0 \\
-A + B - C &= 1;
\end{aligned}
$$

donde $A = 1$

$B = 1$

$C = -1$, ed $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$

46. Non è necessario fare le multiplicazioni indicate nel metodo, e di ordinare per x il prodotto, come nell' esempio precedente. Si suppongano eguali a zero, uno, ad uno, i denominatori dati, e ciascuna di queste supposizioni ci darà nell' equazione ridotta il valore d'una delle indeterminate. Nel nostro esempio, si ha

$$1+z^2 = A(\overline{1-z}.\overline{1+z}) + B(z.\overline{1+z}) + C(z.\overline{1-z}).$$

fatto

fatto il primo fattore $z = 0$, l'equazione si riduce ad $1 = A$. fatto il secondo fattore $1 - z = 0$, si ha $z = 1$, e l'equazione si riduce ad $1 + 1 = A(\overline{1 - 1} \cdot \overline{1 + 1}) + B(1 \cdot \overline{1 + 1}) + C(1 \cdot \overline{1 - 1})$ cioè a $2 = 2B$, donde $B = 1$.
fatto il terzo fattore $1 + z = 0$; si ha allo stesso modo $z = -1$, e $C = -1$.

47. Dalla forma della frazione indeterminata, si vede, che tutti i fattori eguali del dato denominatore devono formare un solo fattore nelle frazioni spezzate; il problema altrimenti ci mena all' impossibile. Sia la frazione

$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{(z-1)(z-1)(z-2)(2z-1)}$; comunque siano quattro i fattori del denominatore, non si possono avere che tre frazioni equivalenti, ed una delle spezzate deve avere per denominatore il prodotto $(z-1)(z-1)$, cioè $(z-1)^2$; in una parola, i denominatori delle frazioni spezzate devono essere primi tra se.

48. Se le radici del denominatore sono imaginarie; 1.° Sia

$\frac{x^m}{L + Mx + Nx^2 \ldots\ldots + Ux^n}$; (si suppone sempre $m < n$)

$= \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} + \frac{C + Dx}{e + fx + gx^2} + \frac{E + Fx}{h + kx + lx^2} + \ldots$ ec.; e

sia $(e + fx + gx^2)(h + kx + lx^2) = \mathfrak{Q}$; $(a + bx + cx^2)(h + kx + lx^2) = R$; $(a + bx + cx^2)(e + fx + gx^2) = S$; sarà, secondo il metodo generale, $x^m = (A + Bx)\mathfrak{Q} + (C + Dx)R + (E + Fx)S + \ldots$ ec.; e supponendo (num. 46.) $a + bx + cx^2 = 0$, sarà $R = 0$, $S = 0$; donde $x^m = (A + Bx)\mathfrak{Q}$.

 2.° Siano

2.° Siano di più le radici imaginarie di $a + bx + cx^2 = 0$, rappresentate da $t + px = 0$, $p + qx = 0$; sarà $x = -\frac{t}{r}$, ed $x = -\frac{p}{q}$; e per $x = -\frac{t}{r}$, si ha $Q = \left(e + f(-\frac{t}{r}) + g(\frac{t^2}{r^2})\right) \times \left(b + k(-\frac{t}{r}) + l(\frac{t^2}{r^2})\right)$, ed allo stesso modo si avrà un altro valore di Q, cioè Q', per l'altro valore di $x = -\frac{p}{q}$.

3.° Si avranno adunque invece di $x^m = (A + Bx) Q$ le due seguenti equazioni,

$$\text{cioè } -\frac{t^m}{r^m} = (A + Bx) Q \ldots \text{ ed } A = -\frac{t^m}{r^m} : Q + \frac{t}{r} B$$

$$-\frac{p^m}{q^m} = (A + Bx) Q' \ldots\ldots A = -\frac{p^m}{q^m} : Q' + \frac{p}{q} B.$$

Paragonando insieme questi due valori di A, si avrà il valore di B, e sostituendo questo valore di B nelle due equazioni, che hanno dati i due valori di A, si avrà il valore di A.

4.° Ciocchè s'è fatto sul fattore $a + bx + cx^2$, si faccia altresì su ciascuno degli altri, e collo stesso metodo si avranno sempre i valori delle indeterminate.

49. Se le radici del denominatore sono in parte reali, in parte imaginarie; non v'ha differenza alcuna ne' principj, e nelle deduzioni del calcolo. Eulero dal compendio del num. 45 deduce un assai elegante teorema per rompere le frazioni, che hanno per fattore de' loro denominatori una quantità della forma $(p - qx)^n$: basti accennarlo, la dimostrazione è facile. Sia

$\frac{M}{N}$

$\frac{M}{N}$ la frazione data, ed $N=(p-qx)^n X$; fatto $A=\frac{M}{X}$

$$P=\frac{M-AX}{p-qx} \qquad B=\frac{P}{X}$$

$$Q=\frac{P-BX}{p-qx} \qquad C=\frac{Q}{X}$$

$$R=\frac{Q-CX}{p-qx} \qquad D=\frac{R}{X}$$

$$\ldots\ \text{ec.} \qquad \ldots\ \text{ec.}$$

Sarà $\frac{M}{N}=\frac{A}{(p-qx)^n}+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}\ldots+\frac{K}{p-qx}$.

Si suppone, che in M, ed in X si metta il valore di x cavato dall'equazione $p-qx=0$, cioè $x=\frac{p}{q}$.

50. L'ultimo problema sullo spezzamento delle frazioni, è di *spezzare una data frazione in più altre, che siano tante in numero, quanti sono i fattori della data, ed abbiano ciascuna il numeratore eguale al numeratore della medesima*.

E' evidente, che ogni frazione si può ridurre ad avere per numeratore l'unità; così $\frac{a}{b}$ è eguale ad a multiplicato per $\frac{1}{b}$. Si potrà adunque supporre, che il numeratore della data, e delle cercate frazioni sia l'unità, e dopo spezzata la frazione data, e ridotta in questa forma, basterà mettere il dato numeratore per numeratore delle frazioni spezzate invece dell'unità.

51. Siano adunque date le frazioni $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xyz}$, $\frac{1}{xyzv}$, ... ec.

Sarà $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$$

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \ldots \text{ec.}$$

..... ec.

Cioè ognuna delle frazioni parziali avrà per denominatore uno de' dati fattori multiplicato per tutti i binomi, che si formano, sottraendo esso da tutti gli altri; ed in fatti, riducendo al comune denominatore le equazioni precedenti, si troverà per numeratore d'amendue i membri la stessa quantità.

52. Nel fare questa riduzione al comune denominatore, si noti: 1.° Che ne' denominatori del secondo membro delle precedenti equazioni ogni binomio viene due volte lo stesso, ma co' segni contrarj, essendo, a cagione d'esempio, il binomio $y-x$, che sta al primo termine del secondo membro nella prima equazione affatto eguale al binomio $x-y$, che sta al secondo termine del membro medesimo; quindi, riducendosi tutti, a due, a due, ad una stessa forma, si scemerà per metà il loro numero, e però anche la fatica del calcolo ne' casi più composti.

2.° Nel mutare questi segni sarà bene serbare un ordine costante, mettendo sempre per positivo quel fattore, che ove sono scritti i fattori nella frazione data è scritto il primo, prendendo a cagione d'esempio nella terza equazione i soli $x-y$, $x-z$, $x-v$, $y-z$, $y-v$, $z-v$. In questo modo nel primo termine d'ogni secondo membro si muteranno tutti i segni de' binomj, nel secondo ne resterà un solo non mutato, nel terzo due, ... e nell' ultimo non se ne muterà alcuno. Quindi basterà la-

lafciare all' ultimo termine il fuo fegno pofitivo, e mutarlo alternativamente ne' precedenti.

53. Fatta colle premeffe due avvertenze la riduzione delle equazioni pofte al num. 51., fi avrà

I. per $\frac{1}{xy}$

$$x-y=-y+x$$

II. per $\frac{1}{xyz}$

$$(x-y)(x-z)(y-z)=yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)$$

III. per $\frac{1}{xyzv}$

$$\begin{aligned}(x-y)(x-z)(x-v)(y-z)(y-v)(z-v)\\ =-yzv(y-z)(y-v)(z-v)\\ +xzv(x-z)(x-v)(z-v)\\ +xyv(x-y)(x-v)(y-v)\\ -xyz(x-y)(x-z)(y-z)\end{aligned}$$

IV. per ... ec.

In ciafcuna di quefte equazioni, il primo membro è fempre eguale al prodotto delle differenze di ciafcuno de' dati fattori fopra tutti i feguenti, ed ogni termine del fecondo membro è fempre eguale al prodotto di tutti i fattori (toltone nel primo il primo, nel fecondo il fecondo..... fattore), ma multiplicato per tutti i binomj delle differenze de' medefimi, prefe coll' ordine accennato.

54. Se fi proverà l'ugualianza de' due membri di quefte fuppofte equazioni, refterà dimoftrato il teorema del num. 51., donde fon nati. Ora; 1.° Nella I.ª fi vede l'ugualianza de' due membri dall' identità della efpreffione.

2.° Nella

2.° Nella II.ª il calcolo è facile; vengono, colla multiplicazione attuale, nel primo membro otto termini, e nel secondo sei; ma in quello se ne distruggono due $\pm xyz$, e rimangono in amendue membri i medesimi sei termini, che ordinati in modo che incomincino colla potenza d'esponente 1, e con quell'ordine, con cui sono scritti nella data frazione, sono

$$-xy^2 + yx^2 - zx^2$$
$$+ xz^2 - yz^2 + zy^2$$

3.° Nella III.ª il calcolo attuale resta molto più lungo. Nel primo membro essendovi sei binomj, e portando la multiplicazione per ogni nuovo binomio il raddoppiamento de' termini, si devono avere termini $(2)^6 = 64$, e nel secondo membro portando ciascuno de' quattro termini, dopo la sua evoluzione, sei nuovi termini, corrispondenti a' suoi tre fattori binomj, vi saranno in tutto termini 24. Quindi nel primo membro, perchè resti l'ugualianza, se ne devono distruggere 40. Si vede anche facilmente quali sieno quegli, che vi devono rimanere.

55. Facciamo qualche riflessione di più su i termini, che devono elidersi, o restare ne' membri dell' equazione III.ª. Nella evoluzione de' tre binomj fatta al num. precedente per l'equazione II.ª sono rimasti tutti, e soli que' termini, che avevano la prima potenza di un fattore, unita colla seconda di un altro. Questo accaderà anche qui in ogni termine del secondo membro, rispetto a que' tre fattori, che entrano nella composizione de' quattro suoi termini; multiplicando tutti que' termini nati così per tutti que' fattori medesimi, quello, che era elevato alla seconda potenza, lo sarà alla terza, l'altro che aveva la prima, salirà alla seconda, e vi si troverà di nuovo quello che mancava in quel termine: Per esempio, nell' ultimo termine del secondo membro deve nascere xy^2, xz^2, e colla multiplicazione per xyz verrà $zx^2 y^3$, $yx^2 z^3$. Quindi anche nella evoluzione del

del primo membro, per avere l'ugualtà col membro secondo, devono restare tutti, e soli que' termini, che hanno tutte le combinazioni possibili delle tre diverse potenze di tre diversi fattori. Ora appunto ciò accade, se si fa l'evoluzione attuale: Per farla ordinatamente, si scrivano i binomj con quell'ordine, con cui sopravvengano al sopravvenire de' nuovi fattori. Gli metterò qui così ridotti, e gli contrassegnerò colla lettera A; gli separerò gli uni dagli altri con virgole, che non significhino interrotta la continuazione della multiplicazione, ma solo mostrino la pertinenza ad un fattore di più; fino alla prima virgola appartengono ai soli xy, fino alla seconda agli xyz, e presi che siano tutti insieme appartengono agli $xyzv$.
Finalmente svolgerò coll' attuale multiplicazione tutti i prodotti contraddistinguendogli coi B, C, D... ec., ε ne soggiungerò dopo la spiegazione.

56. A

$$(x-y),(x-z)(y-z),(x-v)(y-v)(z-v)$$

B

$$(x-y)\times\left(xy+\begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix}z+z^2\right)\times\left(xyz+\begin{matrix}(-xy)\\(-yz)\\(-yz)\end{matrix}v+\begin{matrix}(x)\\(y)\\(z)\end{matrix}v^2-z^3\right)$$

C

$$xy+\begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix}z+z^2$$

D

$$\begin{matrix}(+x)\\(-y)\end{matrix}$$

E

E

$$\begin{matrix}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-zx^2)\\(1)\,(-xyz)\\(1)\,(+xyz)*\,(+zy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(xz^2\;)\\(-yz^2)\end{matrix}$$

F

$$xyz+\begin{matrix}(-xyv)\\(-xzv)\\(-yzv)\end{matrix}+\begin{matrix}(+xv^2)\\(+yv^2)\\(+zv^2)\end{matrix}-v^3$$

G

$$\begin{matrix}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(-zx^2)\\(+zy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(+xz^2)\\(-yz^2)\end{matrix}$$

H

$$\begin{matrix}(+zy^2x^3)\\(-zx^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-vy^2x^3)\\(1)\,(-yzvx^3)\\(2)\,(-zvx^2y^2)*\,(+vx^2y^3)\\(2)\,(+zvx^2y^2)\\(3)\,(+xzvy^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(+yv^2x^3)\\(1)\,(+x^2y^2v^2)\\(2)\,(+yzx^2v^2)\\(1)\,(-x^2y^2v^2)*\,(-xv^2y^3)\\(3)\,(-xzy^2v^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(-yx^2v^3)\\(+xy^2v^3)\end{matrix}$$

I

$$\begin{matrix}(-yz^2x^3)\\(+xz^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}(1)\,(+yzvx^3)*\,(+vz^2x^3)\\(4)\,(+vyx^2z^2)\\(3)\,(-vxzy^3)\\(5)\,(-vxy^2z^2)*\,(-vz^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-zv^2x^3)\\(2)\,(-yzx^2v^2)\\(4)\,(-x^2z^2v^2)\\(3)\,(+xzy^2v^2)*\,(+zv^2y^3)\\(5)\,(+y^2z^2v^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(+zx^2v^3)\\(-zy^2v^3)\end{matrix}$$

K

$$\begin{array}{l} (+yx^2z^1) \\ (-xy^2z^1) \end{array} + \begin{array}{l} (4)(-vyx^2z^2) \\ *\ (-vx^2z^1) \\ (6)(-vxyz^3) \\ (5)(+vxy^2z^2) \\ (6)(+vxyz^3) \\ *\ (+vy^2z^1) \end{array} + \begin{array}{l} (4)(+x^2z^2v^2) \\ (6)(+xyz^2v^2) \\ *\ (+xv^2z^3) \\ (6)(-xyz^2v^2) \\ (5)(-y^2z^2v^2) \\ *\ (-yv^2z^3) \end{array} + \begin{array}{l} (-xz^2v^3) \\ (+yz^2v^3) \end{array}$$

57. In *B* vi sono i binomj di *A* raccolti in tre fattori, formati come si usa nelle equazioni composte, ma prese a rovescio, prendendo, per esempio $(x-v)(y-v)(z-v)$ invece di $(v-x)(v-y)(v-z)$; vengono per tal guisa le stesse combinazioni de' prodotti, ma co' segni contrarj.

In *C* vi è la formola de' secondi due binomj, che ha tre colonne, ed in *D* sta il primo binomio, per cui essa si deve multiplicare.

In *E* vi sono tre colonne, nate dalla multiplicazione di *C* per *D*; la prima, e l'ultima colonna hanno due termini per ciascuna, che sono della forma xy^2, xz^2, e restano: La colonna di mezzo ha due termini, che si distruggono, e sono segnati col numero (1), e ne ha due che restano, e sono segnati coll' asterisco.

In *F* vi è la formola, già ridotta, degli ultimi tre binomj di *A*, uniti in *B*; e in *G*, la formola già trovata in *E* è ridotta coll' ommettere i termini, che si elidono.

In *H*, *I*, *K* vi sono i prodotti di *F* per le tre colonne di *G*, restandovi così quattro colonne, ciascuna delle quali ha tre membri corrispondenti, una per una, alle tre colonne di *G*. Nella prima, ed ultima colonna non si distrugge nulla; nelle due di mezzo si elidono dodici termini per ciascuna, e sono segnati col numero (1), (2)... ec.; rimangono due soli termini per membro, ed hanno la forma xyz^1, xy^2v^3, rimanendo

elisi

elisi tutti quegli della forma $x^2 y^2 v^2$. Qui se ne trovano ventiquattro elisi, e ve ne sarebbero altri sedici, se nella seconda colonna di G si fossero ritenuti que' due, che si sono elisi in E; giacchè multiplicando per essi gli otto termini di F si sarebbero avuti otto termini per uno, durando sempre i segni contrarj.

58. Quindi, raccogliendo i termini non elisi in H, I, K, ed ordinandogli secondo le potenze, e l'ordine de' dati fattori, si ha il prodotto indicato in A, che è il primo membro dell' equazione III.ª, ma preso col segno contrario; cioè

$$
\begin{array}{l}
-\ L \ -\ M \ -\ N \ -\ O \\
- x y^2 z^3 + x y^2 v^3 - x z^2 v^3 + y z^2 v^3 \\
+ x z^2 y^3 - x v^2 y^3 + x v^2 z^3 - y v^2 z^3 \\
+ y x^2 z^3 - y x^2 v^3 + z x^2 v^3 - z y^2 v^3 \\
- y z^2 x^3 + y v^2 x^3 - z v^2 x^3 + z v^2 y^3 \\
- z x^2 y^3 + v x^2 y^3 - v x^2 z^3 + v y^2 z^3 \\
+ z y^2 x^3 - v y^2 x^3 + v z^2 x^3 - v z^2 y^3 .
\end{array}
$$

e facendo la multiplicaztone attuale indicata in ciascun termine del secondo membro della medesima equazione III.ª, si avrà

$$
\begin{array}{l}
- x y z (x - y)(x - z)(y - z) = L \\
+ x y v (x - y)(x - v)(y - v) = M \\
+ x z v (x - z)(x - v)(z - v) = N, \\
- y z v (y - z)(y - v)(z - v) = O .
\end{array}
$$

Ciocchè mostra ad evidenza, che l'equazione supposta al num. 53, per $\frac{1}{xyzv}$, è una vera equazione.

59. Per

59. Per quanti artificj si siéno usati à sminuire il numero de' termini delle attuali multiplicazioni, ad ogni modo dal solo esempio terzo (num. 53.) si vede chiaro, che ne' casi un po più composti il calcolo diventa affatto impraticabile. Adoperando però cotali artificj, si vede almeno in varj esempj la legge de' prodotti, per cui già si può credere generale il teorema, che abbiamo da prima proposto.

60. Per dimostrarlo esattamente, converrebbe 1.° generalmente dimostrare il seguente teorema.

Se dato un numero m di quantità qualunque, si prendano tutti i binomj, che nascono soltraendo da qualunque delle precedenti, qualunque delle seguenti, e questi binomj si multiplichino tutti tra se, vi resteranno tutti, e soli que' termini, chè si formano di quantità m — 1, *elevate ciascuna alle potenze diverse*, 1 . 2 . 3 .... (m — 1), *distruggendosi tutti gli altri.*

Dimostrato che fosse questo teorema, sarebbe chiaro, che que' termini devono essere la somma di tutti quegli, che danno le combinazioni di esse prese a $(m-1)$ per volta, e multiplicate in tutti i binomj, che nascono dalle loro differenze prese coll' ordine già prescritto; dacchè colle successive multiplicazioni si fa entrare ne' termini un fattore di più, e si aumenta (num. 55.) d'un' unità l'esponente de' primi.

2.° Converrebbe dimostrare, che i segni nati dal teorema suddetto, cioè i segni del primo membro dell' equazione ridotta (num. 53.), debban essere gli stessi, che nel secondo membro. Ciò si potrebbe fare considerando tutte le combinazioni, che devono nascere ne' prodotti, dalle quantità, e dai segni. In ogni termine vi deve entrare una delle due quantità d'ogni binomio, onde la somma delle potenze deve essere eguale al numero de' binomj; ciascuna quantità si trova in $m-1$ binomj ed è combinata una volta per una colle quantità compagne, cioè negativamente colle precedenti, e positivamente colle seguenti; la

 pri-

prima è sempre positiva, e l'ultima sempre negativa; ciascuna delle intermedie sono positive tante volte, quante sono quantità, che le vengon dopo, e tante volte negative, quante sono quelle, che la precedono.

Questi elementi guidano ad una dimostrazione generale del teorema del num. 50.

61. Intanto, si deduce con facilità dalle cose dette fin qui il numero de' binomj, e de' termini, che devono corrispondere a qualunque dato numero m di fattori, de' quali sia composto il denominatore della data frazione. Nel primo membro adunque dell' equazione formata come al num. 53., si avrà

Numero de' fattori

2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

Numero de' binomj

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28

Numero de' termini

2 . 8 . 64 . 1024 . 32768 . 2097152 . 268435456

Numero de' termini residui

2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320

O a dire più certo, e più in generale, il numero de' binomj sarà in ciascun caso $1+2+3\ldots+(m-1)$, cioè $\frac{m.\,m-1}{1.2}=n$; il numero de' termini sarà $(2)^n$; il numero de' residui sarà $1\times2\times3\times4\ldots\ldots\times m$, come si potrà vedere cercando co' metodi da spiegarsi nel capo seguente, i termini generali delle precedenti

denti tre ſerie. Se non ſi dimezzava il numero de' binomj, ſi ſarebbe avuto nella ſeconda riga precedente il doppio, e nella terza il quadrato di ogni numero ivi notato.

62. La Sig.ra Agneſi (Iſtituz. Anal. l. 3. num. 21.) dà qualche eſempio di queſto metodo di ſpezzare le frazioni, in ciaſcuno de' quali vi ſono due ſoli, o al più tre fattori, ed hanno queſta forma $\frac{p}{(x+b)(x+c)}$. Il precetto del metodo è eſpreſſo così: „ Dico, che queſta ſarà eguale a due frazioni, il nume-„ ratore delle quali ſia lo ſteſſo di queſta, ed i denominatori „ ſieno; della prima il prodotto d'una delle radici (cioè d'uno „ de' fattori) nella differenza della quantità coſtante dell' altra „ radice, e della quantità coſtante della radice poſta; della ſe-„ conda ſia il prodotto dell' altra radice nella differenza della „ coſtante della prima radice, e della coſtante di queſta ſecon-„ da ". L'applicazione a' ſuoi eſempj ſi riduce qui ad eſſere $\frac{p}{(x+b)(x+c)} = \frac{p}{(x+b)(c-b)} + \frac{p}{(x+c)(b-c)}$; Si vede dall' eſempio, che per differenza delle due radici intende la prima nominata, meno la ſeconda. Aggiunge poi „ ſe le radici foſſero „ tre, quattro.... ec. ſi proceda ſempre collo ſteſſo metodo "; indi per tutta dimoſtrazione dice „ ed in fatti riducendo al co-„ mune denominatore le frazioni in tal guiſa ritrovate, reſti-„ tuiranno eſſe la frazione prima donde ſono nate.

63. Chi conſidera queſto parlare della Sig.ra Agneſi, vedrà quanto poco vi ſi eſprime di quello ſi richiede per un metodo generale. Baſta conſiderare quel tanto poco, che vi vuole per due fattori, con quel tanto di più, che ſi richiede ove creſca il loro numero, vedrà facilmente, ſe il portare l'operazione a più fattori ſia un ſemplice *procedere con quell' iſteſſo metodo*, e con un metodo abbaſtanza ſpiegato. Non ſi vede ivi punto il progreſſo dell' operazione, che debba tenerſi, ove i denominatori ſieno

più

più di due ; quali sieno le differenze da prendersi in ogni frazione, e da unire in ogni denominatore delle spezzate ; e con quale ordine si debbano prendere le differenze medesime. Non vi si esprime nemmeno, che il pigliare la differenza delle sole costanti proviene dal principio più generale del dover prendere la differenza de' fattori, che negli esempj addotti, i quali hanno un x medesimo congiunto con diverse costanti, si riduce alla differenza delle medesime costanti. Innoltre da quanto s'è esposto sopra, si vede quanto sia impraticabile il provare il metodo colla *nuda*, ed attuale riduzione allo stesso denominatore, ove il numero de' fattori sia maggior di due, o tre; tanto più, che dall'Agnesi si piglia la stessa differenza positivamente, e negativamente, onde nel metodo steso a più fattori vi vorrebbe un numero di binomj doppio di quello s'è usato qui sopra, cosicchè, ove il numero de' fattori sieno soli cinque, vi vorrebbe più d'un milione di termini, e per otto fattori, più di settanta mila milioni di milioni di termini.

64. Io mi sono trovato in questo labirinto di difficoltà, e dopo lungo andare mi sembravano inestricabili; mi son dovuto raggirare, ed arrampiccare quà, e là con una quantità prodigiosa di lunghissimi, e nojosissimi calcoli. Ma al fine ho travisto, e poscia ho dedotto da me il teorema generale posto al num. 51.; devo però confessare d'essermi, dopo tutto ciò, servito di molti lumi comunicatimi dal P. Boscovich per rendere più spediti agli altri i medesimi calcoli, per conoscere la legge, che osservano i termini nell'eliderfi, e per isvolgere i principj, da' quali dipende la generale, e rigorosa dimostrazione.

65. Mi restano ad aggiungere quattro avvertenze. 1.° Non ha luogo il metodo esposto quando nel denominatore della data frazione vi entrino due, o più fattori eguali; dacchè nei binomj de' denominatori v'entrerebbe anche lo zero.

2.° In questi casi si consideri la data frazione, come se avesse

un

un ſolo di que' fattori eguali al denominatore; ſi ſpezzi la data frazione, così conſiderata, col metodo ſpiegato, e ſi multiplichino i denominatori delle ſpezzate per il prodotto de' denominatori ommeſſi.

3.° Se uno, o più fattori del dato denominatore ſono compleſſi, P, P', P''... ec., ſi faccia nelle formole del num. 51. $x = P$, $y = P'$... ec., e l'operazione farà la ſteſſa.

4.° Il maggior uſo di queſto problema è ne' caſi, in cui i fattori compleſſi ſono compoſti di una ſteſſa variabile con una coſtante diverſa, della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$... ec., perchè allora tutti i binomj, che accompagnano ogni fattore nella frazione ſpezzata ſono compoſti di quantità coſtanti, reſtando così in ciaſcuna frazione la quantità variabile elevata alla prima ſola potenza.

Evoluzione delle frazioni continue.

66. Si chiama frazione continua quella frazione, il cui denominatore è formato da una quantità intera, e da una frazione, il cui denominatore è di bel nuovo compoſto da una intera quantità, e da una frazione, il cui denominatore .... ec. Aggiungendo a tutte le frazioni continue una quantità qualunque a, ſi avrà la forma ſeguente

$$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d+\cfrac{d'}{e+\cfrac{e'}{\text{.... ec. .... ec.}}}}}}$$

67. E'

67. E' evidente, che

$$a = a$$

$$a + \frac{a'}{b} = \frac{ab + a'}{b}$$

$$a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c}} = \frac{abc + ab' + a'c}{bc + b'}$$

...... ec.

Le frazioni, che formano il fecondo membro di quefte equazioni, fi chiamano frazioni *equivalenti*, cioè equivalgono alle frazioni, che formano il membro primo; ed è evidente, che qualunque termine d'una frazione equivalente è eguale alla fomma de' termini analogi delle due precedenti, ciafcuno multiplicato per una nuova lettera; cioè, a cagione d'efempio, il numeratore $abc + ab' + a'c$ della terza è eguale ai numeratori della feconda, e della prima, multiplicati, quello per c, e quefto per b'.

Da quefto teorema applicato a diverfe frazioni equivalenti, fi ha un metodo facile per trasformare in una ferie, qualunque frazione continua, che è il problema diretto.

68. Si difpongano le frazioni equivalenti, trovate come al num. precedente, in una ferie da finiftra a deftra, che incominci da a°; fopra ciafcun termine di quefta ferie fi fcriva, a modo d'efponente, l'ultimo denominatore della frazione corrifpondente al termine feguente, e fotto il termine medefimo fi fcriva l'ultimo numeratore della fteffa corrifpondente frazione; fi avrà per l'efempio addotto

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a^{\circ} & \dfrac{a}{1} & \dfrac{ab + a'}{b} & \dfrac{abc + ab' + a'c}{bc + b'} \ldots \text{ec.} \\ a' & b' & c' & d' \end{array}$$

Per

Per trovare generalmente il termine R di questa serie; siano $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ i due termini, che immediatamente precedono l'R cercato verso la sinistra, e sia p' l'indice inferiore dell' ultimo precedente $\frac{P}{P'}$, e q l'indice superiore del primo precedente $\frac{Q}{Q'}$; sarà

$$R = \frac{qQ + p'P}{qQ' + p'P'}$$

69. Si noti; 1.° Che s'è incominciata la serie di mezzo da a°, perchè la formola R rappresentasse anche la frazione equivalente ad $a + \frac{a'}{b}$.

2.° Che essendo sempre dati i primi due termini a°, a della serie di mezzo, e tutti gli esponenti, si determineranno colla formola precedente tutti i termini R.

3.° Che determinando tutti gli R fino ad avere impiegato l'ultimo de' dati esponenti, ossia quello, che sta più a destra, l'R, che gli corrisponderà, esprimerà il vero valore esatto della data frazione x, e gli altri R esprimeranno solamente un valore di x approssimato.

4.° Che chiamando R' il secondo termine a della serie di mezzo, andando verso la destra, R'' il terzo, R''' il quarto, ... ec. si ha R' minore di x, R'' maggiore di x, R''' minore di x, ..., e così alternativamente, come è manifesto dalla volgare teoría delle frazioni; cosicchè in generale, gli R che hanno un numero pari d'accenti sono maggiori della data frazione, e gli R, che hanno un numero impari d'accenti sono minori della medesima.

70. Quindi finalmente; in qualunque frazione continua x, si ha

$$x = R' + (R'' - R') - (R'' - R''') + (R^{IV} - R''') - (R^{IV} - R^{V}) + \ldots \text{ ec.}$$

 71. Resta

71. Reſta a cercarſi una regola ſicura per continuare all' infinito, ſenza pericolo d'errare, la ſerie, che eſprime il valore d'x al num. 70. Eccone una aſſai comoda: Si ſcrivano in una ſerie gli R minori di x, e ſopra queſta, tra gli intervalli della ſerie già ſcritta, ſi collochino gli R maggiori di x, nel modo ſeguente:

per gli R maggiori di x ...... R'' R^{IV} R^{VI} R^{VIII} ...... ec.
per gli R minori di x ..... R' R''' R^{V} R^{VII} R^{IX} .... ec.
gli R della ſerie ſuperiore ſono i *minuendi*, gli R della ſerie inferiore ſono i *minutori*; ciaſcun R della ſerie ſuperiore va combinato coi due, che gli ſtanno a lato nella inferiore; l'R'' va combinato coll' R' e coll' R''' ec., e così nel reſto; ciaſcuna di queſte combinazioni va fatta col ſegno — poſto avanti gli R d'accenti impari, e forma un termine della ſerie cercata, da unirſi agli altri, o col +, o col —, ſecondo, che porta l'alternazione de' ſegni, che deve regnare dopo il primo poſitivo, nella ſerie x.

72. Soſtituendo adunque nella formola del num. 70. i valori di R preſi dalla frazione data al num. *66.*, ſi ha la ſerie

$$a + \frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc + b')} + \frac{a'b'c'}{(bc + b')(bcd + b'd + c'd)} - \dots \text{ ec.},$$

che corriſponde a quella frazione, e facendo nella frazione medeſima $a = 0$, perchè eſſa rappreſenti le pure frazioni continue, ſi avrà la ſerie $\frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc + b')} + \dots$ ec., che le corriſponde; finalmente ſe gli a', b', c', d' .... ec., cioè i numeratori d'una data frazione continua ſiano quantità ſempre coſtanti (a cagione d'eſempio tante unità), ed a, coi denominatori b, c, d ... ec. della frazione medeſima ſiano numeri interi poſitivi, la ſerie che gli corriſponderà ſarà con pochi termini convergentiſſima al valor vero; in ogni caſo però ſi interromperà la ſerie ſemprecchè la data frazione non anderà all' infinito.

73. Paſ-

73. Passiamo al problema inverso delle frazioni continue, cioè a trasformare una data serie in una frazione continua. A questo servirà di formola ecumenica la formola del num. precedente, e la frazione corrispondente del num. 66. Si proceda così.
1.° Si assumano ad arbitrio i numeratori, o i denominatori della frazione continua, che si cerca: Noi qui supporremo assunti i denominatori a, b, c, d... ec.
2.° Si paragoni termine per termine la serie data colla serie del num. precedente; si avranno tante equazioni quanti sono termini della data serie.
3.° Con queste si determinino i numeratori a', b', c'...ec. (se si fossero assunti questi, si determinerebbero i denominatori a, b, c... ec.); cioè si esprimano i loro valori per mezzo delle lettere assunte, e de' termini della serie data.
4.° Si sostituiscano questi valori nella frazione del num. 66.

74. Applichiamo il metodo a qualche esempio. Sia data la serie

$$x = A - B + C - D + E - \dots \text{ ec.},$$

che per cominciare con un solo termine positivo sarà rappresentata dalla serie

$$x = \frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc+b')} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà

$$A = \frac{a'}{b}$$

$$B = \frac{a'b'}{b(bc+b')}$$

$$C = \frac{a'b'c'}{(bc+b')(bcd+b'd+c'd)}$$

$$D = \dots \text{ ec.}$$

Quindi

$$A = \frac{a'}{b}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{b'}{bc+b'}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{c'b}{bcd+b'd+c'b}$$

$$\frac{D}{C} = \dots \text{ ec.}$$

Cioè

Cioè

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{Cd(bc+b')}{b(B-C)}$$

$$d' = \frac{De(bcd+b'd+c'b)}{(bc+b')(C-D)}$$

.... ec.

e finalmente

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$d' = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

.... ec.

75. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \dots \text{ ec.}$$

Si avrà collo ſteſſo metodo

$$a' = \frac{b}{A}$$

$$b' = \frac{Abc}{B-A}$$

$$c' = \frac{B^2 cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$d' = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)}$$

.... ec.

76. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = \frac{b}{A}$

$$b' = \frac{bc}{B-1}$$

$$c' = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$d' = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

.... ec.

77. Sia

77. Sia data la ſerie

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = Ab$

$$b' = \frac{Bbcz}{A - Bz}$$

$$c' = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)}$$

$$d' = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)}$$

.... ec.

78. Determinati così i valori de' numeratori, converrà prima di fare le ſoſtituzioni nella formola del num. *66.* determinare ad arbitrio i valori de' denominatori a, b, c, d ... ec.; Ma perchè la forma della frazione ſia più ſpedita, ſarà bene aſſumergli tali, che eſſendo eſſi numeri interi, eſprimano in numeri interi anche i numeratori; queſto però dipende altresì dalla natura de' termini della data ſerie.

Si faccia, a cagione d'eſempio,

al num. 74....... $b = 1$

$c = A - B$

$d = B - C$

$e = C - D$

$f = \dots$ ec.

e, fatte le Soſtituzioni, ſi avrà

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{(A - B) + \cfrac{AC}{(B - C) + \cfrac{BD}{(C - D) + \cfrac{CE}{(D - E) + \dots \text{ ec.}}}}}}$$

al

al num. 75 . . . . $b = A$

$c = B - A$

$d = C - B$

$e = D - C$

$f = \dots$ ec.

e si avrà

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{(B-A) + \cfrac{B^2}{(C-B) + \cfrac{C^2}{(D-C) + \dots \text{ ec.}}}}}$$

così pure al num. 76., fatto $b = A$ ed al num. 77. $b = 1$

$c = B - 1$ $c = A - Bz$

$d = C - 1$ $d = B - Cz$

$e = D - 1$ $e = C - Dz$

$f = \dots$ ec. $f = \dots$ ec.

Si determinerà come sopra la frazione x.

79. Si noti per ultimo, che si può cambiare in frazione continua qualunque frazione, o volgare essa sia, o decimale espressa a modo delle volgari. Sia A il numeratore, e B il denominatore della data frazione; ed usando il metodo del num. 86. dell'Introduzione per avere il comune divisore di due quantità,

Sia

Sia $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$

$$\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C} \;\ldots\; \text{donde} \;\ldots\; \frac{C}{B} = \cfrac{1}{b + \frac{D}{C}}$$

$$\frac{C}{D} = c + \frac{E}{D} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \frac{D}{C} = \cfrac{1}{c + \frac{E}{D}}$$

.... ec. .... ec.

$$\text{quindi } \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \cfrac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \frac{E}{D}}} = \ldots \text{ ec.}$$

cosicchè chiamando a, b, c, d... ec. i quoti interi, e trovati col metodo accennato, si avrà $x = \frac{A}{B}$

$$= a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \ldots \text{ ec.}}}}}}$$

80. Per dare un esempio di questo metodo, egli è noto, che se si concepisca distesa in lungo la semiperifería d'un circolo qualunque, essa paragonata al raggio, che la ha descritta, si troverà prossimamente tripla del raggio medesimo, cioè la lunghezza del raggio sta alla lunghezza della semiperifería prossimamente come l'unità a 3. Questa ragione del raggio r preso per unità alla lunghezza della semiperifería si esprime più esattamente, come l'unità al numero

3,

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510
5820974944592307816406286208998628034825342211706798
21480865132723066470938446 .... ec. $= p$.

Si tratti ora d'esprimere la ragione di p ad r con numeri così piccoli, che non se ne possa avere una più accurata, se non usando numeri molto maggiori. Ognun vede, che basta mutare in una frazione continua il dato numero decimale p, ed una delle frazioni equivalenti sarà la frazione, o la ragione cercata. In questa sorte di problemi quanto più i termini della data ragione son grandi, tanto più sarà accurata la determinazione; ma nell' esempio nostro sarebbe impraticabile il calcolo, se si volessero usare tutte le 129 figure, che danno quel prossimissimo valore di p. Determinando la frazione continua corrispondente alle trentadue prime figure, si troveranno i quoti

$$3 \,.\, 7 \,.\, 15 \,.\, 1 \,.\, 292 \;\ldots\; \text{ec.}$$

e le frazioni equivalenti formeranno la serie, contata dopo l'a° del num. 68.

$$\frac{3}{1} \,.\, \frac{22}{7} \,.\, \frac{333}{106} \,.\, \frac{355}{113} \,.\, \frac{103093}{33102} \;\ldots\; \text{ec.}$$

La prima frazione mostra, che $p:r::3:1$, nè si può più accuratamente esprimere in numeri non maggiori la ragione di p ad r; la seconda frazione da $p:r:22:7$, che è la ragione *Archimedea*; e la quarta frazione da $p:r::355:113$, che è la ragione *Mezziana* maggiore della vera meno di $\frac{1}{113 \times 3302}$; tutte poi le ragioni espresse coi termini trovati sono alternativamente minori, e maggiori della vera, la prima è minore, la seconda è maggiore, la terza è minore, la quarta maggiore... ec., come abbiamo già notato sopra.

81. Si

81. Si facciano le ſteſſe rifleſſioni ſulla frazione o, 000290 888208665 72... ec., e ſu 206264, 7887323... ec.
La prima frazione eſprime la lunghezza d'un arco circolare d'un minuto primo, ed è cavata dalla ſeguente analogía: la ſemiperifería ſta all' arco d'un minuto primo, come p ſta al quarto; La ſeconda frazione eſprime il numero de' ſecondi, che comprenderebbe il raggio d'un circolo, ſe eſſo foſſe curvato in arco ſulla perifería del circolo medeſimo, ed è dedotta dalla ſeguente analogía, come p ſta ad r, così la ſemiperifería eſpreſſa in ſecondi ec. (cioè 648000 ſecondi) ſta al quarto termine. Colla prima frazione ſi ha facilmente la lunghezza d'un arco qualunque; baſta multiplicare per quella il numero de' primi minuti, de' quali è compoſto l'arco dato. Colla ſeconda frazione ſi ha facilmente l'arco, che corriſponde a qualunque (per parlare cogli Aſtronomi) funzione circolare, eſpreſſa in parti del raggio; baſta multiplicare per quella frazione la funzione data.
Si noti 1.º Che per avere la ſeconda frazione s'è uſata la ragione Mezziana della ſemiperifería al raggio.
2.º Che riducendo la ſeconda frazione a' gradi, ſi vede, che il raggio è eguale a 57 gradi, 17 minuti, e 44, 8 ſecondi proſſimamente. Queſte coſe ſiano qui dette di paſſaggio, e per eſercizio di calcolo ſulle frazioni continue.

CAPO TERZO.

Della Sommazione delle ſerie, e del loro termine generale.

Claſſi diverſe, ed eſpreſſioni generali delle ſerie.

82. NE' due precedenti capi s'è data una ſufficiente idea delle ſerie, che naſcono dalla Evoluzione delle quantità algebraiche; non ci reſta altro a fare per una compiuta trattazione delle ſerie, che moſtrare il metodo per trovare, data una ſerie, il ſuo termine generale, e dato, o trovato il termine generale, trovare la generale ſomma della medeſima. E' però da ſaperſi avanti ogn'altra coſa; 1.° Che dagli Analiſti ſi chiama *funzione* d'una quantità, qualunque algebraica eſpreſſione comunque compoſta da quella, e da altre quantità, o date, o preſe ad arbitrio; così $a + 3z$, $a + 4z$, $az \pm b\sqrt{a^2 - z^2}$ ſono funzioni di z.

2.° Che per *termine generale* d'una ſerie intendiamo quì una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini $1 . 2 . 3 \ldots\ldots m$ della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente il primo, il ſecondo, il terzo, l'$m^{eſimo}$ termine della ſerie data.

3.° Che *ſomma generale* d'una ſerie, ſignifica parimenti una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini $2 . 3 \ldots\ldots m$ della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente la ſomma de' primi due, de' primi tre, de' termini m della ſerie data.

83. Ciò ſuppoſto: Conviene diſtinguere le ſerie ſommabili dalle non ſommabili; dacchè d'infinite ſerie non ſi può trovare la

la ſomma eſatta, ma ſolo per approſſimazione; queſte richiedono un trattato a parte, e ſi conoſcerà quali eſſe ſieno dal non poterſi col metodo, che eſporrò, trovare la loro ſomma vera. Quanto alle ſerie ſommabili, a tre claſſi, o generi ſi riducono quelle, che più comunemente ſono uſate ne' calcoli.

Il primo genere comprende tutte le ſerie, chiamate *aritmetiche* per l'analogía, che eſſe hanno nella loro formazione, colle progreſſioni aritmetiche; il ſecondo genere comprende tutte le ſerie, chiamate *geometriche* per l'analogía, che eſſe hanno nella loro formazione, colle geometriche progreſſioni; il terzo comprende tutte quelle, che naſcono dalla compoſizione delle ſerie, che appartengono agli altri due.

84. Se una data ſerie ſia tale, che, ſcritti i ſuoi termini, cominciando dal minimo, uno ſotto l'altro in una colonna verticale A, le differenze de' ſuoi termini, ſcritte in una colonna B accanto alla prima, ſiano coſtanti, quella ſerie, come è noto, ſi chiama progreſſione aritmetica. Quindi hanno tratto il nome di ſerie aritmetiche quelle ſerie, in cui non le differenze di A ſcritte in B, ma le differenze di B ſcritte in C, o quelle di C ſcritte in D, o... ec. ſieno coſtanti; e chiamando ſerie aritmetiche di primo ordine le ſemplici progreſſioni aritmetiche, ſi ſono chiamate ſerie aritmetiche di ſecondo, di terzo, di quarto.... ordine le altre ſerie, ſecondochè eſſe avranno le differenze coſtanti in C, in D, in E.... ec. Le differenze ſcritte in B ſi chiamano differenze *prime*, e quelle ſcritte in C, in D, in E... ec. ſi chiamano differenze *ſeconde*, *terze*.... ec. della ſerie A. Onde le ſerie, che hanno le differenze $n^{eſime}$ coſtanti, ſono ſerie aritmetiche di ordine $n^{eſimo}$.

85. E' evidente, che la ſerie $1 . 2 . 3 ..... m$ è una ſerie aritmetica di primo ordine; che le potenze ſeconde di m formano una ſerie aritmetica di ſecondo ordine, le terze di m formano una ſerie aritmetica di terzo ordine; ed in generale, che

le potenze n di m formano una ſerie aritmetica di ordine n.
O più generalmente ancora Bm rappreſenta un termine qualunque delle ſerie aritmetiche di primo ordine, Cm^2 rappreſenta le ſerie aritmetiche di ſecondo ordine, Dm^3 quelle di terzo, e Tm^n quelle d'ordine n; e per maggiore generalità ancora, ſi potrà aggiungere a ciaſcuna di queſte ſerie un termine della ſerie coſtante A.

86. Quindi $A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots\ldots Tm^n$ rappreſenta ſucceſſivamente tutte le ſerie aritmetiche fino all' ordine n; cioè i primi due termini $A + Bm$ rappreſenta le ſerie aritmetiche di primo ordine; i primi tre quelle di ſecondo ordine; e così nel reſto.

87. Le ſerie geometriche ſono ſerie di numeri formate dall' addizione de' termini analogi di più progreſſioni geometriche; e chiamando ſerie geometriche del primo ordine le ſemplici progreſſioni geometriche, le ſerie formate dall' addizione de' termini analogi di due, di tre, di quattro, di n progreſſioni geometriche, ſaranno ſerie geometriche di ſecondo, di terzo, di n ordine.

88. Se H, I, $K \ldots$ ec. rappreſentino ciaſcuno un dato diverſo numero, è noto, che ciaſcuno de' H^m, I^m, $K^m \ldots$ ec. rappreſenterà una progreſſione geometrica d'eſponente m, formata da' riſpettivi loro numeri preſi per baſe della progreſſione; e più generalmente rappreſenteranno qualunque progreſſione geometrica, ſe ciaſcuna di queſte formole ſi multiplicheranno per una indeterminata; cioè AH^m, BI^m, $CK^m \ldots$ ec. ſaranno le eſpreſſioni di diverſe progreſſioni geometriche, cioè rappreſenteranno indeterminatamente qualunque termine m di diverſe progreſſioni geometriche.

89. Quindi $AH^m + BI^m + CK^m + \ldots$ ec. rappreſenta ſucceſſivamente con termini n le ſerie geometriche d'ordine n; cioè il primo termine AH^m rappreſenta le ſerie geometriche di primo

mo ordine, i primi due termini $A H^m + B I^m$ rappresenta le serie geometriche del secondo ordine, e così nel resto.

90. E' manifesto, che $(A + B m + C m^2 \ldots\ldots T m^n) H^m$ comprende un' infinità di serie del terzo genere, cioè composte di serie aritmetiche all' infinito diverse, e di qualunque serie geometrica; queste serie si chiamano *aritmetico-geometriche*, e l'esponente del loro ordine, è la somma degli esponenti dell' ordine delle due serie. E' facile quindi a formarsi idea delle altre serie di terzo genere, infinitamente diverse all' infinito.

91. Il celebre Moivre chiama serie *ricorrenti* tutte le serie, i termini delle quali sono formati da' termini precedenti multiplicati rispettivamente da quantità costanti. Di questa natura sono le serie, di cui abbiamo dato fin qui gl' indeterminati termini generali; ci sarà assai utile nel decorso la dimostrazione di questo teorema.

92. Dico adunque in primo luogo, che le serie aritmetiche sono serie ricorrenti. Se $A + B + C + D \ldots + T$ sia una serie aritmetica di primo ordine, che ha $A + B m$ per termine generale, sarà

$$C = 2 B - A$$
$$D = 2 C - B$$
$$E = 2 D - C$$
$$F = 2 E - D$$
$$\ldots \text{ ec.}$$

Se sia una serie aritmetica di secondo ordine, che ha termine generale $A + B m + C m^2$, sarà

$$D = 3 C - 3 B + A$$
$$E = 3 D - 3 C + B$$
$$F = 3 E - 3 D + C$$
$$E = 3 F - 3 E + D$$
$$\ldots \text{ ec.}$$

Se

Se sia una serie aritmetica di terzo ordine, che ha per termine generale $A+Bm+Cm^2+Dm^3$, sarà

$$E=4D-6C+4B-A$$
$$F=4E-6D+4C-B$$
$$G=4F-6E+4D-C$$
$$H=4G-6F+4E-D$$
.... ec.

Ed in generale, le serie aritmetiche di ordine n sono serie ricorrenti di ordine $n+1$. Per avere generalmente il termine T, per qualunque ordine n di serie aritmetiche, si scelgano i coefficienti $s, r, q, p\ldots$ ec. per la potenza $n+1$ del binomio $a+b$, ommesso il primo degli estremi, e si prendano termini $n+1$ nella formola

$$T=sS-rR+qQ-pP+\ldots\ \text{ec.}$$

93. Dico in secondo luogo, che le serie geometriche sono serie ricorrenti. Se $A+B+C+D\ldots\ldots+T$, sia una serie geometrica di primo ordine, che ha per termine generale AH^m,

fatto $H=s$, sarà $T=sS$.

Se sia una serie geometrica di secondo ordine, che ha per termine generale AH^m+BI^m,

$$\text{fatto } H+I=s$$
$$HI=r$$
$$\text{sarà } T=sS-rR$$

Se sia una serie geometrica di terz'ordine, che ha per termine generale $AH^m+BI^m+CK^m$,

$$\text{fatto } H+I+K=s$$
$$+HI+HK+IK=r$$
$$+HIK=q$$

sarà, alternando i segni, $T=sS-rR+qQ$

Ed in generale le serie geometriche d'ordine n, sono serie ricorrenti del medesimo ordine. Per avere generalmente il T per qualunque ordine n di serie geometriche, si chiami s la somma di tutti i $H, I, K, L, M, N\ldots$ ec.; si chiami r la somma di tutti

tutti i binarj de' medesimi; q la somma di tutti i ternarj....., e così nel resto, sarà, alternando i segni,

$$T = s\,S - r\,R + q\,Q - p\,P + \ldots \text{ ec.}$$

94. Dico finalmente, che le serie Algebraico-geometriche sono serie ricorrenti.

Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$ sia una serie Algebraico-geometrica di ordine n, si avrà per il T la stessissima formola del num. 92., con questo solo divario, che il termine m^{esimo} della medesima è multiplicato per H^m.

95. Non m'è ignoto, che si può determinare il termine T d'una serie ricorrente d'ordine n con soli $n - 1$ termini precedenti. Vedi Eulero num. 227..... 230. Tom. 1. della più volte citata Introduzione; ma ciò non è contrario alla generale deffinizione, che l'ordine delle serie ricorrenti sia il numero de' termini precedenti, che determinano il seguente; al più si potrà dire, che la stessa serie può considerarsi come ricorrente d'ordine n, e d'ordine $n - 1$.

96. Tutte quasi le serie, che abbiamo dedotte ne' due precedenti capi sono serie ricorrenti di qualche ordine. Noi abbiamo ivi assegnata la legge di dipendenza d'un termine qualunque dagli altri; Si noti, che alcune di quelle serie con qualche trasformazione si riducono a serie ricorrenti aritmetiche. A cagione d'esempio, nel capo secondo (num. 42.) per le frazioni, che hanno al denominatore una quantità della forma $(1 - i\,x)^{m+1}$, fatto $i = 1$, ed $x = 1$, si avrà una serie della forma seguente

Se $m = 1$, si avrà

$$b + (b + a) + (b + 2a) + (b + 3a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 2$, si avrà

$$c + (c + b) + (c + 2b + a) + (c + 3b + 3a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 3$, si avrà

$$d + (d + c) + (d + 2c + b) + (d + 3c - 3b + a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 4$, si avrà

..... ec.

La

La prima di queſte ſerie rappreſenta generalmente tutte le ſerie aritmetiche di primo ordine ; la ſeconda rappreſenta quelle di ſecondo ordine.... la $n^{eſima}$ rappreſenta quelle di ordine n.

97. Si noti di paſſaggio , che nelle ſerie precedenti , a indica l'ultima differenza , che è coſtante ; b indica la prima delle penultime ; c la prima delle antipenultime... ec. , come ſi fa manifeſto dal prendere coll' ordine detto al num. 84. le differenze de' loro termini : A cagione d'eſempio per la ſeconda ſerie , ſi avrà

A	B	C
c		
....	b	
$c+b$	....	a
....	$b+a$	
$c+2b+a$	....	a
....	$b+2a$	
$c+3b+3a$		
... ec.	... ec.	

Trovare la ſomma , ed il termine generale delle ſerie , ſecondo il metodo del P. Riccati.

98. NEl cercare la ſomma , ed il termine generale delle ſerie , mi ſono appigliato al metodo , che il P. Riccati ha così elegantemente eſpoſto nel ſuo tanto inſigne Commentario *de ſeriebus recipientibus ſummam Algebraicam , aut exponentialem*. Ho trovato vero in pratica , ciocchè egli accenna nella ſua prefazione , cioè , che il ſuo metodo determina tutte le ſerie propoſte da' più celebri Autori , che hanno trattata queſta materia , ed all' incontro ſi determinano col metodo medeſimo molte altre ſerie , delle quali non ſi ſaprebbe trovare la ſomma coi metodi altrui. Vedi Eulero , Mayer , Stirling , ec.

Sta-

Stabilito, che avrò l'universale principio del P. Riccati, discenderò ad applicare il suo metodo alle serie aritmetiche, quindi alle geometriche, e finalmente alle serie composte di amendue.

99. Il principale artificio del P. Riccati è di assumere varie formole, che indeterminatamente rappresentino le somme generali delle serie, e dalla loro contemplazione dedurne le condizioni, che devono avere i loro termini generali, perchè da essi si possa rimontare alle somme cercate. Mette egli per base di tutte le sublimi sue inquisizioni il seguente semplicissimo teorema: In qualunque serie il termine generale è eguale alla somma di tutti i termini fino ad m *inclusive*, meno la somma di tutti i termini, inclusivamente fino al termine $m-1$; cioè chiamando T il termine m^{esimo}, S la somma de' termini m, ed s la somma de' termini $m-1$, si ha $T=S-s$.

100. Si noti: 1.° Che quantunque sia $T=S-s$, se si trovi $T=A-a$, non si dovrà perciò conchiudere, che A sia la vera somma, o che sia $A=S$, comunque A, ed a siano funzioni di m; così si ha $\frac{6m-5}{2}=\frac{3m^2-1}{2}-\frac{3(m-1)^2-1}{2}$, eppure $\frac{3m^2-1}{2}$ non è la somma della serie, che ha $\frac{6m-5}{2}$ per termine generale.

2.° Si può facilmente conoscere, se A è la vera somma, anzi facilmente si può ridurre A ad essere la vera somma, quando nol sia. Si faccia $m=1$ tanto in T, quanto in A, cosicchè s'abbia T', ed A'; Se $T'-A'=0$, sarà $A=S$. Se $T'-A'=b$, sarà $A+b=S$; nel precedente esempio si ha $T'=\frac{2}{2}$, ed $A'=1$; donde $S=\frac{3m^2-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3m^2}{2}$.

3.° Fin-

3.° Finchè il T ha la forma di $S - s$, la formola non può servire all'uso, dacchè venendo s dalla sostituzione di $m - 1$ invece di m in S, la serie formata da T sarà composta di due, ed il termine m^{esimo} della prima eliderà il termine $(m+1)^{esimo}$ della seconda; onde non rimarrà, che l'ultimo termine della prima serie meno il primo termine della seconda; ciocchè ciascuno potrà vedere formando la serie, che ha per somma $\frac{m}{2+m}$, fatto

$$T = S - s = \frac{m}{2+m} - \frac{m-1}{1+m}.$$

101. Posti questi principj prendiamo col P. Riccati ad esaminare la seguente formola $S = Am + Bm^2 + Cm^3$ ..... ec.
1.° Se $S = Am$, mettendo $m - 1$ invece d'm in S, si ha $s = Am - A$, e pel teorema $T = S - s = A$; ognun vede, che non entrando l'm in questo termine generale, egli rappresenterà una serie di quantità costanti A, A, A .... ec., la somma della quale è lo stesso Am.
2.° Se $S = Am + Bm^2$, mettendo $m - 1$ invece di m in S, si avrà

$$s = -A + Am$$
$$+ B - 2Bm + Bm^2;$$

e, pel teorema, sarà $T = \begin{matrix} A \\ -B + 2Bm \end{matrix}$

Formando la serie corrispondente a questo T colla sostituzione di $1; 2; 3$.... ec. invece di m, si ha $A + B$; $A + 3B$; $A + 5B$; ... ec., che è una progressione aritmetica di differenza costante $2B$, o una serie aritmetica di primo ordine; dunque
$\begin{matrix} A \\ -B + 2Bm \end{matrix}$ è la forma, che deve avere il termine generale di questa serie, perchè la loro somma sia rappresentata da S; cioè deve contenere una parte costante $A - B$, ed un'altra $2Bm$ multiplicata per m lineare; allora $Am + Bm^2$ rappresenterà la loro

loro somma; e di più, se un dato termine generale abbia la forma del nostro, paragonando la parte costante con $A-B$, e la parte multiplicata per m con $2Bm$, si determineranno gli A, B da sostituirsi in S per avere la somma vera. Anzi data una serie aritmetica di primo ordine, supponendo eguale il primo suo termine ad $\begin{matrix}+A\\-B+2B\end{matrix}$, (posto $m=1$), ed il secondo della serie al medesimo $\begin{matrix}+A\\-B+2Bm\end{matrix}$, (fatto $m=2$), si avranno tante equazioni quante indeterminate, ed i loro valori sostituiti in S, T, daranno la somma vera, ed il vero termine generale della data serie.

3.° Se $S=Am+Bm^2+Cm^3$; allo stesso modo colla sostituzione di $m-1$ invece di m in S, si avrà

$$T=\begin{matrix}A\\-B+2Bm\\+C-3Cm+3Cm^2\end{matrix}$$

; e determinando la serie di questo T, si avrà $A+B+C$; $A+3B+7C$; $A+5B+19C$;... ec., che è una serie aritmetica di second'ordine, che ha la seconda differenza costante $6C$; dunque la forma del nuovo T è la forma, che deve avere il termine generale di queste serie, perchè il primo S rappresenti la loro somma; e di più, se un dato termine generale avrà la predetta forma, cioè una parte $A-B+C$ costante, una parte distinta da m, come $2Bm-3Cm$, ed una terza parte $3Cm^2$ distinta da m^2; colle equazioni formate dal paragone rispettivo di queste tre parti, si determineranno gli A, B, C da sostituirsi in S per avere la somma, che corrisponde al dato T. Anzi data una serie aritmetica di second'ordine, paragonando il primo termine della data serie con questo T (in cui si faccia $m=1$), il secondo della serie col T (supposto $m=2$), il terzo della serie col medesimo T (posto $m=3$), si avranno tante equazioni, quante

 ne

ne abbisognano per determinare gli A, B, C da sostituirsi in T, ed S per avere la somma, ed il termine generale della serie proposta.

4.° Collo stesso discorso, considerando quattro, cinque .... termini di quel primo S della formola, si determineranno le condizioni, che devono avere i termini generali, perchè da quegli S siano rappresentate le somme delle loro serie, e si dedurrà il metodo per avere la somma, ed il termine generale delle serie di differenze terze, quarte .... costanti.

102. Quindi si può dire generalmente, che le serie ricorrenti aritmetiche d'ordine n hanno per termine generale una funzione di m, in cui m è alzata alla potenza n; e che le serie, il cui termine generale è una funzione di m, nella quale m è alzata alla potenza n, ha per somma generale una funzione di m, che ha per esponente massimo $n+1$. Da queste due considerazioni si ha un metodo universale, e facile per la pratica.

1.° Data una serie, in cui la differenza n^{esima} è costante, trovare il termine generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $T = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots\ldots + Lm^n$; fatto m successivamente eguale ad 1; 2; 3;... ec., si paragoni successivamente l'indeterminato T col primo, secondo, terzo..... termine della data serie, fino ad avere tante equazioni, quante sono le indeterminate in T; si sostituiscano i valori di A, B, C .... dedotti da queste equazioni, in T.

2.° Dato (o trovato) il termine generale d'una serie di differenza n^{esima} costante, trovare la somma generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $S = Am + Bm^2 + Cm^3 \ldots\ldots + Lm^{n+1}$; si determini colla sostituzione di $m-1$ invece di m un nuovo valore $T = S - s$; col paragone delle parti di questo T colle parti rispettive del dato termine, si avranno tante equazioni, quante sono le indeterminate in T, ed i loro valori so-

sti-

ſtituiti in S, daranno la ſomma generale della ſerie, di cui ſi ſuppone dato il termine generale.

103. Quanto alle ſerie ricorrenti geometriche, ſi conſideri la formola $S = A H^m - A$; ſoſtituito $m-1$ invece di m, ſi ha

$$s = A H^{m-1} - A$$

donde $T = S - s = (A H^m - A) - (A H^{m-1} - A)$

$$= \frac{A . \overline{H-1}}{H} H^m .$$

Se H foſſe minore dell' unità, ſi dovrebbe al ſolito, mutare il ſegno d'uno de' fattori. Ognun vede, che queſto termine generale ci dà una ſerie geometrica di primo ordine, e che perciò quando il termine generale dato ſia compoſto d'un fattore della forma H^m, e di un altro della forma $\frac{A . \overline{H-1}}{H}$, eſſo appartiene ad una ſerie geometrica di primo ordine. Paragonando i dati fattori componenti coi noſtri indeterminati, ſi avrà il valore di A, H da ſoſtituirſi in S: Così pure, ſe data la ſerie geometrica, ſi cerchi il termine generale, paragonando l'indeterminato T coi primi due termini della data ſerie, ſi avrà il valore di A, H, da ſoſtituirſi in T.

104. Per le ſerie geometriche di grado più elevato del primo, ſi è già notato, che eſſe ſono un aggregato di ſerie geometriche di primo ordine; Onde 1.° Date le ſerie componenti, la ſomma de' loro termini generali ſarà il termine generale della compoſta.

2.° Dato il termine generale della compoſta, la ſomma delle ſomme generali delle ſue parti (che ſono i termini generali delle ſerie componenti) ſarà la ſomma generale della medeſima.

105. Si dica lo ſteſſo per le ſerie ricorrenti aritmetico-geometriche, adoperando la ſomma, o la multiplicazione delle parti

ti de' termini, e delle somme generali, secondocchè esse sono formate colla somma, o colla multiplicazione di più serie componenti.

106. Resta a darsi un metodo per trovare il termine generale per le serie ricorrenti geometriche, ed aritmetico-geometriche data la legge della serie. 1.° Si dà la legge delle serie ricorrenti geometriche, quando si danno i multiplicatori de' termini precedenti al T cercato, ed, essendo questi multiplicatori la somma s, i prodotti a due, a due r, i prodotti a tre, a tre q... ec. degli H, I, K, L... ec., che entrano a formare il termine generale $T = AH^m + BI^m + DK^m + \ldots$ ec., si riduce la quistione, a sapere separare da quei prodotti s, r, q ... ec. le quantità H, I, K, L... ec. da sostituirsi in T. Questo però è il notissimo problema dell'Analisi Cartesiana sciolto da noi in tutta la sua generalità nell' introduzione, e nel capo primo di questo secondo libro. Si chiami x il valore di ciascuna di quelle lettere, m in numero; se la somma di questi x è s, e quella de' loro binarj, ternarj .... sia r, q, p... ec., sarà per il num. 101.

$$x^m - s x^{m-1} + r x^{m-2} - q x^{m-3} + p x^{m-4} - \ldots\ \text{ec.} = 0\,,$$

e le radici di questa equazione saranno i valori cercati.

2.° Per le serie aritmetico-geometriche, si chiamino allo stesso modo s', r', q', p'... ec. i coefficienti di S, R, Q, P avuti nella formola formata al num. 102., ed i valori di

$$x^m - s' x^{m-1} + r' x^{m-2} - q' x^{m-3} + \ldots\ \text{ec.} = 0$$

saranno i valori di

$$H,\ I,\ K,\ L,\ M,\ N,\ \ldots\ \text{ec.}$$

da sostituirsi in T.

3.° I valori di A, B, C ...... Q, R, S si determineranno in amendue i generi di serie ricorrenti qui spiegate, col noto paragone dell' indeterminato T con i primi n termini dati, o assunti

sunti della serie di cui vien data la legge. Si noti, che per le serie algebraico-geometriche, sarà $S = (A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Dm^4 \ldots\ldots \text{ec.}) H^m - A$; e che se sia $H = 1$, l'S sarà la somma semplici serie aritmetiche.

107. Una sola è la difficoltà, che s'incontra nell'uso delle precedenti equazioni. Siano dati i primi due termini 1.1 d'una serie ricorrente del secondo ordine, e tale, che per avere un altro qualunque termine, sia necessario sommare il primo termine precedente multiplicato per 3 col secondo precedente multiplicato per $-\frac{9}{4}$; quale sarà la forma del suo termine generale? Avrà egli la forma d'una serie geometrica, o d'una serie aritmetico-geometrica? In questo, ed in somiglianti casi, si sciolga l'equazione $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, si avrà $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$; cioè si avranno due radici eguali; questo è segno, che il cercato termine generale non può avere la forma $AH^m + BI^m$, ma solamente la forma $(A + Bm) H^m$, cioè sarà $T = (A + Bm) \left(\frac{3}{2}\right)^m$. Se si sostituisce $\frac{3}{2}$ invece di H, I in $AH^m + BI^m$, si avrebbe $\left(\frac{3}{2}\right)^m A + \left(\frac{3}{2}\right)^m B$, donde $1 = \frac{2}{3}$, che è un assurdo.

108. Basti il detto fin qui sulle serie ricorrenti, cioè sulle serie aritmetiche, sulle serie geometriche, e sulle serie composte da queste due. Per le serie, che non sono ricorrenti, io ne produrrò d'una sola specie, che ne abbraccia infinite subalterne. Chi desiderasse una più precisa notizia su altre serie più intralciate, legga il citato Commentario. Contempliamo intanto la formola

$$S = \frac{Lm + Mm^2 + Nm^3 \ldots\ldots + Rm^{p-1} + Sm^p}{(A + Bm)(A + B\,\overline{m-1})\ldots\ldots(A + B.\,\overline{m-p+2})(A + B.\,\overline{m-p+1})}$$

So-

Sostituendo $m-1$ invece di m, si avrà

$$s=\frac{L\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2+N.\overline{m-1}^3\ldots+R.\overline{m-1}^{p-1}+S\overline{m-1}^p}{(A+B.\overline{m-1})(A+B.m-2)\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.\overline{m-p})}$$

Per sottrarre l's dall'S, si multiplichino i termini della frazione S per $A+B.\overline{m-p}$, ed i termini della frazione s per $A+Bm$; fatta la riduzione, non si avrà più il T sotto la forma di $S-s$, ma chiamando $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ nel secondo membro delle seguenti equazioni tutto il secondo fattore del primo membro, sarà il numeratore di T.

$$(A+B.\overline{m-p})\left\{\begin{matrix}Lm+Mm^2+Nm^3\ldots\\ \ldots+Rm^{p-1}+Sm^p\end{matrix}\right\}=(A+Bm-Bp)\mathfrak{Q}$$

$$-(A+Bm)\left\{\begin{matrix}L.\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2+N.\overline{m-1}^3\\ \ldots\ldots\ldots+R.\overline{m-1}^{p-1}+S.\overline{m-1}^p\end{matrix}\right\}=(A+Bm).(-\mathfrak{Q}')$$

ed il denominatore

$$D=(A+Bm)(A+B.\overline{m-1})\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.m-p)$$

E' manifesta la legge, con cui va decrescendo il denominatore di T. Per conoscere la legge, che regna nel numeratore, è evidente, che egli è eguale a

$$(A+Bm)(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-Bp\mathfrak{Q}$$

cioè eguale ad $A(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')+Bm(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-Bp\mathfrak{Q}$; ed essendo

$$\left\{\begin{array}{ll}L.(m-\overline{m-1}) & =-L\\ M.(m^2-\overline{m-1}^2) & =-M+2Mm\\ N.(m^3-\overline{m-1}^3) & =+N-3Nm+3Nm^2\\ \vdots & \\ R.(m^{p-1}-\overline{m-1}^{p-1}) & =\pm R\mp\frac{\overline{p-1}}{1}Rm\pm\frac{\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1.2}Rm^2\ldots\\ S.(m^p-\overline{m-1}^p) & =\mp S\pm\frac{p}{1}Sm\mp\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}Sm^2\ldots-pSm^{p-1}\end{array}\right.$$

eguale

eguale a $\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}'$, sostituendo questo valore di $\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}'$ nel numeratore $(A+Bm)(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-Bp\mathfrak{Q}$ si vedrà anche in questo la costante legge de' suoi termini.

109. 1.º Ciascun fattore del denominatore di T è il termine generale d'una serie aritmetica di primo ordine. La serie aritmetica del secondo fattore $A+B.\overline{m-1}$ non è diversa dalla serie del primo fattore $A+Bm$, se non in questo, che il primo termine della serie del secondo fattore, è il secondo termine della serie del primo fattore; e così la serie del terzo fattore, comincia dal secondo termine della serie del secondo fattore, la serie del quarto fattore comincia dal terzo del terzo fattore... ec.

2.º Il denominatore di T è lo stesso, che il denominatore di S.

3.º Fatto il numero de' fattori del denominatore eguale a $p+1$, l'esponente massimo di m nel numeratore di T è $p-1$, cioè minore di due unità del numero de' fattori.

4.º Dato qualunque termine generale, che abbia le tre precedenti proprietà, si troverà il numeratore della somma generale paragonando colla formola il dato numeratore; e conseguentemente se il termine generale d'una serie abbia le condizioni del nostro, si troverà sempre la somma generale della serie medesima.

110. Perchè sia più spedita la determinazione della somma generale delle serie, i cui termini generali hanno la forma del numero precedente; 1.º Fatto il numero de' fattori del denominatore D eguale ad r, si supponga

$$S=\frac{Lm+Mm^2+Nm^3\,.....+Sm^r}{D};$$

2.º Determinato s colla sostituzione di $m-1$ invece d'm in S, si riducano gli S, s allo stesso denominatore, cosicchè si abbia S', s'; sarà $T=S'-s'$.

 3.º Pa-

3.° Paragonando i termini di T con quegli del dato termine generale si avranno i valori di L, M, N... ec.

111. L'uso del calcolo farà svanire certe difficoltà, che forse fa nascere la semplice enunciazione del metodo. Se nel denominatore D non si succedano i fattori, come in T del num. 108., ma manchino alcuni fattori intermedj, si moltiplichi il numeratore, ed il denominatore del dato termine generale per i fattori, che mancano. Se...... ec.

Osservazioni sul metodo del P. Riccati.

112. IL metodo del P. Riccati, tuttocchè elegante, semplice, ed universale, sembra a primo aspetto alquanto prolisso, e tedioso nella sua applicazione. Quasi sempre, è vero, si hanno a sciogliere equazioni solamente di primo grado; ma per ogni nuova serie pare sia uopo ripetere le stesse operazioni, di sottrazioni d'un' equazione dall' altra, di moltiplicazioni......, con facile pericolo di errare ne' calcoli, e nelle frequenti sostituzioni. Non è però così in fatti a chi vi si metta di proposito, e si renda per qualche tempo famigliari gli artificj, che per entro vi sparge il suo autore; anzi nel rimirare partitamente le formole, che si deducono da quel metodo ne' casi particolari, si accorgerà chicchessia, che si possono esse generalizzare assai, e farle servire per infiniti altri casi simili. Il P. Riccati non ha voluto dedurre questi compendj, che ben vedeva contenersi nel suo metodo, o per non dilungarsi troppo dal suo fine, o per lasciare a chi leggesse il Commentario con attenzione, il piacere di dedursegli da se. Io esporrò le osservazioni, che ho fatte sul metodo del P. Riccari, per renderlo più semplice, e più facile ad applicarsi alle serie di qualunque genere, ed insieme scioglierò qualche interessante problema sulle serie medesime. Incominciamo dalle serie aritmetiche.

113. Le

113. Le progressioni aritmetiche, che sono le serie aritmetiche di primo ordine, hanno, come detto è al num. 87. la forma b; $b+a$; $b+2a$; $b+3a$.... ec.; e le serie aritmetiche di secondo ordine, hanno la forma c; $c+b$; $c+2b+a$; $c+3b+3a$.... ec. Col metodo del P. Riccati si ha per termine generale, e per somma generale di queste due serie

Per la prima...... $T = \begin{array}{l} b \\ -a+am \end{array}$

$S = \begin{array}{l} bm \\ -\frac{1}{2}am+\frac{1}{2}am^2 \end{array}$

Per la seconda.... $T = \begin{array}{l} c \\ -b+bm \\ +a-\frac{3}{2}am+\frac{1}{2}am^2 \end{array}$

$S = \begin{array}{l} cm \\ -\frac{1}{2}bm+\frac{1}{2}bm^2 \\ +\frac{1}{3}am-\frac{1}{2}am^2+\frac{1}{6}am^3 \end{array}$

114. Cerco se questi due T, ed S seguitino qualche legge costante nella loro formazione, ed osservo, che nel primo T la parte $-a+am$ è eguale ad $\overline{m-1}\,.\,a$; onde per le serie aritmetiche di primo ordine si ha $T=b+\frac{m-1}{1}\,.\,a$, come al num. 81. del libro primo.

La seconda formola di T è composta d'una parte, che ha la stessa forma della precedente, cioè $c-b+bm$, e di un' altra,

in cui non c'entrano, che gli m, e gli a; perciò si avrà la prima parte ridotta a $c+\frac{m-1}{1}b$, e la seconda $\frac{1}{2}am^2-\frac{3}{2}am$ $+a=\frac{1}{2}am^2-\frac{3}{2}am+\frac{2}{2}a$; non considerando per ora il comune denominatore 2 di questa seconda parte, si ha am^2-3am $+2a=(m^2-3m+2)a=(\overline{m-1}.\overline{m-2})a$; e la seconda parte della formola di T, sarà $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}a$; cioè per le serie aritmetiche di second'ordine, sarà

$$T=c+\frac{m-1}{1}b+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}a.$$

115. Si sono adunque ridotti que' due T trovati col metodo del P. Riccati ad avere per coefficienti de' termini i coefficienti numerici della formola delle potenze d'un binomio; innoltre in amendue i T così disposti l'a sta sempre al primo termine verso destra, e verso la sinistra succedono negli altri termini il b, ed il c; finalmente il numero de' termini in ciascun T è eguale ad $n+1$. Se queste osservazioni sono generalmente vere per tutti i T delle altre serie aritmetiche, per le serie aritmetiche di terzo ordine, si avrà

$$T=d+\frac{m-1}{1}c+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}b+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\;.\;2\;.\;3}a.$$

E di fatti tanto coll'applicare il metodo del P. Riccati all'espressione generale di queste serie d; $d+dc$; $d+2c+b$; $d+3c$ $+3b+a$;... ec., quanto facendo le multiplicazioni indicate nel proposto valore di T; si ha sempre

$$\frac{d-c+cm}{1}+\frac{bm^2-3bm+2b}{2}+\frac{am^3-6am^2+11am-6a}{6}$$

Lo

Lo ſteſſo avverrebbe in tutte le altre eſpreſſioni generali delle ſerie aritmetiche di qualunque ordine; maſſimamentecchè ſi moſtra una ſpecie d'analogía trai coefficienti delle lettere ne' termini delle ſerie aritmetiche, ed i coefficienti de' termini delle potenze; così nell' eſpreſſione delle ſerie aritmetiche di terz' ordine, i coefficienti del terzo termine $d + 2c + b$ ſono i coefficienti del quadrato d'un binomio; i coefficienti del quarto termine ſono i coefficienti del cubo... ec.

116. Con ſimili rifleſſioni fatte ſulle formole delle ſomme generali, ſi ha per le ſerie aritmetiche

di primo ordine

$$S = \frac{m}{1} b + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} a$$

di ſecond' ordine

$$S = \frac{m}{1} c + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} b + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$$

di terz' ordine

$$S = \frac{m}{1} d + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} c + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} b + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\overline{m-3}}{4} a.$$

...... ec.

117. Dalla ſola iſpezione di queſte formole, e dal num. 97. ſi ha un metodo facile per trovare il termine generale, e la ſomma generale d'una ſerie aritmetica di qualunque ordine. Si prendano come al num. 97. le differenze prime, ſeconde, ... n^{esime} della data ſerie; chiamando a il primo termine della colonna A, chiamando b il primo termine della colonna B, chiamando c il primo termine della colonna C.... ec.; ſi ha

$$T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \;.\; 2} c + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} d + \ldots\ldots \text{ ec.}$$

$$S = \frac{m}{1} a + \frac{m.\overline{m-1}}{1.\; 2} b + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\; 2 \;.\; 3} c + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4} d + \ldots\ldots \text{ ec.}$$

118. A fare meglio ſentire l'utilità delle due precedenti formole, gioverà l'eſempio ſeguente. Si cerchi il termine generale, e la ſomma generale della ſerie aritmetica 2 ; 9 ; 24 ; 50 ; 90 ; . . . . ec.

Nel metodo del P. Riccati: 1.º Conviene eſaminare, quali ſiano le differenze coſtanti di queſta ſerie; ſi avrà

A	B	C	D
2			
	7		
9		8	
	15		3
24		11	
	26		3
50		14	
	40		
90			
⋮			
ec.			

cioè le differenze terze ſono coſtanti.

2.º La formola del termine generale per le ſerie di terze differenze coſtanti è $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$; che mettendo $m = 1$ rappreſenterà il primo termine 2 della ſerie data; mettendo $m = 2$ rappreſenterà il ſecondo termine 9... ec.; ſi avrà dunque

$$A + B + C + D = 2$$
$$A + 2B + 4C + 8D = 9$$
$$A + 3B + 9C + 27D = 24$$
$$A + 4B + 16C + 64D = 50$$

3.º Diſpo-

3.° Disponendo per ordine le differenze di queste equazioni; cioè sottraendo la prima dalla seconda, la seconda dalla terza, e la terza dalla quarta, si ha

$$B + 3C + 7D = 7$$
$$B + 5C + 19D = 15$$
$$B + 7C + 37D = 26$$

Le differenze di queste tre equazioni, danno

$$2C + 12D = 8$$
$$2C + 18D = 11$$

Le differenze di queste due, danno finalmente $D = \frac{1}{2}$.

4.° Rimontando da questo valore di D ai valori di C, B, A colle solite sostituzioni, si ha $A = 0$ $C = 1$

$$B = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

donde si avrà $T = \frac{1}{2} m + m^2 + \frac{1}{2} m^3$.

119. Per trovare S, si scelga la formola $Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4$; 1.° Sostituendo $m - 1$ invece di m, e sottraendo la nuova formola dalla formola assunta, si ha

$$\begin{aligned} &A \\ &- B + 2Bm \\ &+ C - 3Cm + 3Cm^2 \\ &- D + 4Dm - 6Dm^2 + 4Dm^3 \end{aligned}$$

2.° Paragonando il termine, che non contiene l'm col termine, che non ha l'm di T, cioè con zero, e ciascuno degli altri col suo corrispondente in T; si ha

$$A = \frac{5}{12} \quad C = \frac{7}{12}$$

$$B = \frac{7}{8} \quad D = \frac{1}{8}$$

donde

donde si avrà $S = \frac{5}{12} m + \frac{7}{8} m^2 + \frac{7}{12} m^3 + \frac{1}{8} m^4$.

120. Tale è il metodo del P. Riccati ; usando le formole del num. 117. basta trovare le differenze della data serie, che è il primo passo del metodo precedente, e si avrà

$$a = 2 \qquad c = 8$$
$$b = 7 \qquad d = 3$$

fatte le sostituzioni in T, ed S, sarà

$$T = 2 + \frac{m-1}{1} \cdot 7 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \,.\, 2} \cdot 8 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot 3$$

$$S = \frac{m}{1} \cdot 2 + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \,.\, 2} \cdot 7 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot 8 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$\frac{\overline{m-3}}{4} \cdot 3$$

Tutti gli altri termini de' T, S indeterminati svaniscono per essere uno de' loro fattori, e, f, g.... ec. eguale a zero.

121. Le formole del num. 117. mutando alcune denominazioni, e componendo i coefficienti delle lettere, che distinguono ciascun termine, si riducono alle formole del Goldbacchio (Atti di Lipsia 1720.). Aveva certamente in vista queste formole il P. Riccati, quando disse nella prefazione del suo Commentario; *Regulae, quam sine demonstratione attulit Goldbacchius, neque apparet unde deduxerit, in mea methodo genuinum fundamentum habebis*. Confesso sinceramente, che, prima di pensare a Goldbacchio, dalla sola applicazione del metodo del P. Riccati alle generali espressioni delle serie aritmetiche, io m'era dedotte le predette formole, e che leggendo poi a caso la memoria del Goldbacchio, a mala pena mi sono accorto, che le sue formole si potevano ridurre alle mie. Io non so come siasi mai egli indotto quest' autore a mettere l'*eccettera* dopo cinque termini

mini della sua formola, non iscoprendosi all' occhio nessuna legge de' coefficienti. Restano adunque in quest' articolo dimostrate, e dedotte dal metodo del P. Riccati anche le formole del Goldbacchio.

122. Ciocchè s'è fatto per le serie aritmetiche, si può parimenti stendere alle serie geometriche, ed alle composte d'amendue. Si multiplichino le formole aritmetiche del num. 87., termine per termine, coi termini di varie progressioni geometriche indeterminate, e prese dal num. 84. del libro precedente; alle nuove formole, che si avranno da queste multiplicazioni, si applichi successivamente il metodo del P. Riccati, e si avrà la costante legge per trovare senz'altro calcolo il T, e l'S. Noto però, che fatto il calcolo, non ho trovate formole tanto eleganti, quanto per le serie aritmetiche; ma sono tali, per cui si schivano varie equazioni di terzo grado, e di grado più elevato, che sono inevitabili nel metodo del P. Riccati in varie serie geometriche. Noi passiamo oltre a cose più interessanti.

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continuate.

123. IO chiamo *serie interrotta* una serie A' formata da termini presi ad eguali intervalli di termini r, in una data serie qualunque A; e questa serie A la chiamo serie continuata. Il problema, che prendo a sciogliere nel presente articolo è il seguente: *Data la legge, che regna in una serie qualunque interrotta, o aritmetica, o geometrica, o comunque composta da queste due, trovare il* T, *e l'*S *della sua continuata.*

124. La soluzione di questo problema, dipende da uno de' seguenti due teoremi.

Teorema primo. Il termine m^{esimo} d'una serie interrotta A' è l'$(\overline{m-1}\,.\,r+m)^{esimo}$ della sua continuata A.

Teorema ſecondo. Il termine m^{esimo} d'una ſerie continuata A è l' $\frac{m+r}{r+1}^{esimo}$ della ſua interrotta A'.

Il primo teorema è manifeſto dalla formazione della ſerie A'. Per avere il ſecondo termine di A', ſi deve ommettere dopo il primo termine di A un numero r di termini; cioè il ſecondo termine di A' è l'$(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; per avere il terzo termine di A', ſi deve ommettere un altro numero r di termini dopo l'$(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; cioè il terzo termine di A' è l'$(1+\overline{r+1}+\overline{r+1})^{esimo}$, oſſia il $(2r+3)^{esimo}$ di A; così il quarto di A' ſi troverà eſſere il $(3r+4)^{esimo}$ di A, e da qui già ſi conoſce generalmente, che l'm^{esimo} di A' è l'$(\overline{m-1}.r+m)^{esimo}$ di A.

Il ſecondo teorema ſi deduce facilmente dal primo. Si chiami m la claſſe del termine m^{esimo} della ſerie continuata, ed m' quella del termine m^{esimo} della interrotta; Sarà per il teorema precedente $m'=\overline{m-1}.r+m=mr+m-r=\overline{r+1}.m-r$;

donde $m'+r=\overline{r+1}.m$, cioè $m=\frac{m'+r}{r+1}$.

Si noti, che, nelle due formole precedenti l'm, e l'm' indicano ſempre lo ſteſſo numero; non s'è poſto l'accento al ſecondo m, che per diſtinguere l'm della ſerie continuata dall'm della interrotta.

125. E' più ſpedito l'uſo del ſecondo teorema per la ſoluzione del problema propoſto. Si cerchi il T, e l'S della data ſerie interrotta A', come ſe foſſe una ſerie continuata; invece di m, ſi ſoſtituiſca in amendue il numero $\frac{m+r}{r+1}$; ſi avrà il T, e l'S della continuata A.

Sia

Sia data, a cagione d'esempio, la serie geometrica A . . . . . 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . . . ec.; da questa serie se ne formi un' interrotta, con ommettere successivamente due termini dopo il primo; si avrà la serie A' . . . . . 1 . 8 . 64 . . . ec. Il problema si riduce a trovare l'S, ed il T di A, posto, che si conosca unicamente la serie A', ed il numero r de' termini ommessi in A per formarla. Già si sa, che il termine generale di A' è 8^{m-1}; invece di m si scriva il numero $\frac{m+r}{r+1}$, cioè, nel caso nostro, si scriva $\frac{m+2}{3}$, e si avrà $8^{\frac{m+2}{3}-1} = 8^{\frac{m-1}{3}}$ per termine generale della serie continuata A; e di fatti $8^{\frac{m-1}{3}}$ è eguale a 2^{m-1}, che altronde si sa essere il termine generale di A; lo stesso dicasi per l'S.

126. Uso del primo teorema. Sia data la serie interrotta di qualunque genere.

A . . . , . . f . * . * . g . * . * . h . * . * . i . * . * . k . . . . . , ec.

gli asterisci (che dovrebbero essere r in numero) posti tra un termine, e l'altro di questa serie A', tengono luogo de' termini, r in numero, che si suppongono ommessi nella serie incognita A, per formare la serie data.

1.° Si prenda indeterminatamente il termine generale per le serie d'ordine n della classe della data A; in questo T, si sostituisca invece di m il numero $\overline{m-1}.r+m$, e fatto questo nuovo m successivamente eguale ad 1 . 2 . 3 . 4 . . . . ec., si supponga T eguale al primo, al secondo, al terzo . . . . termine di A'. Con queste equazioni si determineranno i valori delle indeterminate del primo assunto T, che sostituiti nel T medesimo daranno il termine generale cercato.

2.° Avuto il termine generale di A per mezzo della serie A', si avrà coi metodi già spiegati, ancora l'S di A.

127. Sia,

127. Sia, a cagione d'eſempio, la data ſerie A' una ſerie interrotta di una ſerie aritmetica, continuata A, d'ordine n, il termine generale della quale è $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} c + \ldots$ ec.

E' evidente 1.° , che queſto T ſarà eguale al ptimo dato termine f, ſe ſi ſupponga $m = 1$; ſarà eguale a g, ſe ſi ſupponga (per il teor. 1.°) $m = r + 2$; ſarà eguale al terzo h, ſe ſi ſupponga $m = 2r + 3$; ... ec. Cioè i valori di m in T formeranno una progreſſione aritmetica, che incomincia da $r + 2$, ed ha per differenza coſtante la quantità $r + 1$.

2.° Se la ſerie continuata è di differenze prime coſtanti, anche la data ſerie interrotta avrà le differenze prime coſtanti: Se la ſerie continuata è di differenze ſeconde coſtanti, anche la ſerie interrotta avrà le differenze ſeconde coſtanti; .... cioè l'ordine della ſerie continuata ſarà l'ordine della interrotta.

3.° Se la ſerie continuata ha le differenze n^{esime} coſtanti, s'arriverà alle differenze coſtanti anche nella interrotta con $n + 1$ termini.

4.° La formola T, che rappreſenta ciaſcun dato termine dopo le ſoſtituzioni de' valori riſpettivi di m, ſi romperà dopo due termini ſe $n = 1$, dopo tre termini ſe $n = 2$, dopo $n + 1$ termini per le differenze n^{esime}.

128. 1.° Adunque ſi avrà per il T di ciaſcun dato termine di A':

$$f = a$$

$$g = a + \frac{r+1}{1} b + \frac{\overline{r+1} \cdot \overline{r+0}}{1 \cdot 2} c + \frac{\overline{r+1} \cdot \overline{r+0} \cdot \overline{r-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$h = a + \frac{2r+2}{1} b + \frac{\overline{2r+2} \cdot \overline{2r+1}}{1 \cdot 2} c + \frac{\overline{2r+2} \cdot \overline{2r+1} \cdot \overline{2r+0}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \ldots \text{ec.}$$

k

$$k=a+\frac{3r+3}{1}b+\frac{\overline{3r+3}\cdot\overline{3r+2}}{1\cdot 2}c+\frac{\overline{3r+3}\cdot\overline{3r+2}\cdot\overline{3r+1}}{1\cdot 2\cdot 3}d+\ldots\text{ec.}$$

$$i=a+\frac{4r+4}{1}b+\frac{\overline{4r+4}\cdot\overline{4r+3}}{1\cdot 2}c+\frac{\overline{4r+4}\cdot\overline{4r+3}\cdot\overline{4r+2}}{1\cdot 2\cdot 3}d+\ldots\text{ec.}$$

$$l=a+\ldots\ \text{ec.}$$

2.° In questa ferie d'equazioni fe ne dovranno prendere due, cominciando da f, fe $n=1$; fe ne dovranno prendere tre, fe $n=2$, e per le differenze n^{esime} fe ne dovranno prendere $n+1$. Il fecondo membro di eiafcuna di quefte equazioni, toltane la prima, dovrà fempre avere un numero $n+1$ termini; cioè eiafcuna ne avrà tanti nel fecondo membro, quante fono le equazioni prefe. Con quefte equazioni fi determineranno le indeterminate a, b, c.... per ogni cafo.

129. Applico il metodo alle ferie aritmetiche di terzo ordine. Per quefte non fi richieggono più di quattro termini f, g, h, k, e le equazioni faranno le prime quattro del num. precedente terminate inclufivamente al termine, che contiene il d: prendendo le differenze di quefte equazioni, e le differenze delle differenze,...... come al num. 81, fi avrà

fatto

A	B	C	D
f			
...	p		
g	...	t	
...	q	...	u
h	...	v	
...	s		
k			

$$a=f$$

$$b=\frac{p}{(r+1)}-\frac{rt}{2(r+1)^2}+\frac{r\cdot\overline{2r+1}\cdot u}{6(r+1)^3}$$

$$c=\frac{t}{(r+1)^2}-\frac{ru}{(r+1)^3}$$

$$d=\frac{u}{(r+1)^3}$$

130. Quindi fi formino le quattro colonne A, B, C, D delle differenze de' dati termini interrotti, come al num. 97., e fi

si chiamino (per tenere denominazioni analoghe a quelle del num. 117.) a', b', c', d' i primi termini delle colonne medesime, e per le serie di differenze terze costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{rc'}{2(r+1)^2} + \frac{r \cdot \overline{2r+1} \cdot d'}{6(r+1)^3}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2} - \frac{rd'}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{d'}{(r+1)^3}$$

sarà $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} c + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d.$

131. E' evidente, che se le serie interrotte saranno di secondo ordine, svaniranno nelle formole precedenti il d, e tutte le quantità, nelle quali c'entra d': Se le serie interrotte saranno di primo ordine svaniranno nelle formole precedenti il c, d, e tutte le quantità, ove c'entra c', d'. Quindi

Per le serie di differenze seconde costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{rc'}{2(r+1)^2}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2}$$

sarà $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} c.$

Per

Per le serie di differenze prime costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} \text{ sarà } T = a + \frac{m-1}{1} b$$

132. Se si applicasse il metodo medesimo alle serie aritmetiche d'ordine più elevato del terzo, si troverebbe una costante legge de' valori di a, b, c... ec. Si troverebbe a cagione d'esempio, che disponendo questi valori come al num. 130., dovrebbero corrispondersi nella prima colonna, per numeratori gli a', b', c'... ec., e per denominatori le potenze 0 . 1 . 2 . 3 .. ec. di $r+1$ prese per ordine; nella seconda colonna, per numeratori gli $1c'$, $2d'$, $3e'$, $4d'$... ec. ciascuno multiplicato per r, e per denominatori il doppio delle potenze 2 . 3 . 4 . 5 ... di $r+1$ prese per ordine; nella terza colonna... ec. In questa guisa si avrebbe poi in generale, e senz'altro calcolo, il valore di ciascuna lettera a, b, c... ec. per le serie aritmetiche d'ordine n; ed ancora d'ogni altra serie.

133. Si noti la differenza de' due metodi precedenti. Nel termine generale, e nella generale somma d'una serie continuata di qualunque genere, per esempio delle serie aritmetiche, entrano due sole indeterminate, cioè gli m, e gli a, b, c...ec. Col primo teorema (num. 124.) si è cercato quali dovessero essere le variazioni degli a, b, c... ec., ed il secondo teorema ci ha date le variazioni degli m, per passare dalle serie interrotte supposte note, alle continuate supposte ancora sconosciute.

Interpolazione delle serie.

134. *INterpolare* una data serie, significa inserire tra due qualunque suoi termini un dato numero r di termini intermedj, che seguano la medesima legge della serie data. Se la

data

data ſerie è una ſerie aritmetica di primo ordine, s'è già dato al num. 78. del libro precedente il metodo d'interpolarla; così pure al num. 65. ſi è eſpoſto il metodo d'interpolare le ſerie geometriche di primo ordine. Ma oltrecchè que' metodi ſono aſſai faticoſi per la pratica, maſſimamente quando ſi debba interpolare tutta la ſerie fino al termine $m^{eſimo}$, il problema, che noi ci proponiamo al preſente comprende tutte le ſerie d'ordine n di qualunque genere, o ſommabili, o no, purchè di eſſe ſi poſſa trovare il termine generale.

135. Il problema della interpolazione, non è, a parlare con rigore, che una parte di quello, che abbiamo ſciolto nell' articolo precedente. La ſerie data a interpolarſi corriſponde alla noſtra ſerie interrotta, e la ſerie, che ſi avrà dopo l'interpolazione, corriſponderà alla noſtra ſerie continuata. Dico *corriſponderà*, perchè la ſerie continuata non ſarà propriamente la ſerie interpolata, non cercandoſi in tutto coll' interpolazione, che termini $n(r+1)+1$, e col termine generale della ſerie continuata, ſi trovano tutti gli altri termini all' infinito; onde il problema dell' articolo precedente è più generale di quello della interpolazione.

136. Si aggiunge, che coll' interpolazione non ſi cercano il più delle volte tutti i termini della ſerie interpolata, ma ſolamente l' $s^{eſimo}$ degli r poſti fra l' $m^{eſimo}$, e l' $(m+1)^{eſimo}$ della ſerie data. Or chi voleſſe ſciogliere il problema dell' interpolazione col metodo dell' articolo precedente, dovrebbe:

1.° Cercare coi termini della data ſerie, il termine generale T della corriſpondente ſerie continuata.

2.° Dovrebbe cercare quale termine ſia di tutta la ſerie data, e ſuppoſta interpolata l' $s^{eſimo}$ cercato.

3.° E finalmente ſoſtituire in T invece di m il numero, che ne indica la claſſe.

137. Eſempio. Si cerchi il termine quinto de' cinque interpolati

polati tra i termini 78., e 300. della ſerie aritmetica
$A' \dots 0 \,.\, 78 \,.\, 300 \,.\, 666 \dots$ ec.

1.° Si ha (num. 130.) $TA = \frac{m-1}{1} 3 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} 4,$

oppure trovato $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} 144,$

ſi ha (num. 125.) $TA = \frac{m-1}{1} 13 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-7}}{1\,.\,2} 4.$

2.° Il quinto termine cercato trai due della data ſerie A' ſarebbe il dodiceſimo della interpolata A; come ſi può vedere contando nella ſerie A' i dati termini, e gli aſteriſci, che ſi frappongano tra l'uno, e l'altro invece de' termini interpolati.
A o . * . * . * . * . * . 78 . * . * . * . * . * . 300 ... ec.
3.° Si dovrà dunque ſupporre in uno dei TA trovati, $m = 12$, e ſi avrà pel quinto termine cercato 253.
Ciocchè s'è fatto qui per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78 e 300 di A', è evidente, che ſi può egualmente fare per qualunque altro $s^{eſimo}$ degli r interpolati tra due qualunque termini di qualunque ſerie. Ma ad alcuni ſembra nojoſo il dovere badare ogni volta a quel valore di m da ſoſtituirſi in TA. Ho penſato perciò di ſchivare per l'interpolazione, anche queſt' incomodo, col metodo ſeguente.

138. *Trovare il termine* $s^{eſimo}$ *degli* r *interpolati tra il termine* $m^{eſimo}$, *ed* $(m+1)^{eſimo}$ *d'una data ſerie* A'.
1.° Si cerchi il termine generale T di A'. 2.° Si ſoſtituiſca in T il numero $m + \frac{s}{r+1}$ invece di m.

Così per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78, e 300 della ſerie
$A' \dots 0 \,.\, 78 \,.\, 300 \,.\, 666 \dots$ ec.

 Si

Si ha 1.° $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 \;.\; 2} 144$.

2.° Per essere $m=2$, $r=5$, $s=5$, sostituendo invece di m il numero $m + \frac{s}{r+1} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, si ha $(\frac{17}{6} - 1) 78 + (\frac{17}{6} - 1)$ $(\frac{17}{6} - 2) (\frac{144}{2} = \frac{11}{6} 78 + \frac{11}{6} . \frac{5}{6} . 72 = \frac{11}{6} (78 + \frac{5}{6} . 72) = \frac{11}{6}$ $(78+60) = \frac{11}{6} . 138 = 253$, come si era avuto prima.

139. Dimostrazione del metodo. Si indichi per m la classe, che occupa in A qualunque termine t, e per m' si indichi la classe, che il medesimo t occupa in A'; è chiaro, che gli m, m' saranno qui numeri sempre diversi.

La serie A contiene tutti i termini di A', e di più tutti gli s^{esimi} degli r ommessi per formare A'; quindi in A' non si contengono, che i termini $(m-s)^{esimi}$ di A; cioè gli m'^{esimi} di A' sono gli $(m-s)^{esimi}$ di A; ma per il teorema 1.° num. 124. gli m'^{esimi} di A' sono gli $(\overline{m'-1} . r + m')^{esimi}$ di A; dunque gli $(m-s)^{esimi}$ di A sono gli $(\overline{m'-1} . r + m')$ del medesimo A. Quindi $m - s = \overline{m'-1} . r + m' = m'r + m' - r$; ed $m' . \overline{r+1} + s = m + r$, ossia $m' + \frac{s}{r+1} = \frac{m+r}{r+1}$; cioè il numero $m' + \frac{s}{r+1}$ è eguale al numero, che sostituito in TA' ha dato (num. 137.) l' s^{esimo} cercato.

140. Si noti: 1.° Che prima d'applicare i metodi del num. 136. 138. all' interpolazione delle serie, conviene bene distinguere di quale classe esse sieno, se aritmetiche, o geometriche, o composte d'amendue, o d'altra specie qualunque: Ciò è neces-

necessario per trovare il vero termine generale delle date serie, con cui unicamente si troveranno coi metodi prescritti gli esatti termini intermedj.

2.° Che si propongono talvolta certe serie a interpolarsi, di cui non si sa ben deffinire a quale classe appartengano; in questi casi converrà osservare a quale classe s'accostino di più, per quindi maneggiarle come se veramente fossero di quella classe. Così nel calcolare i luoghi de' Pianeti si è osservato, che le serie de' luoghi de' medesimi, dedotte, o dalla osservazione, o dalle tavole per diversi tempi dati, più s'accostano alle serie aritmetiche, che non ad altre; quindi nel determinare le loro posizioni intermedie a' tempi, ed alle posizioni date, si suole sempre ad essi applicare il metodo delle serie aritmetiche. Il Sig. De La Lande (Acad. Par. an. 1761. p. 125., ed Astr. l. 24.) ha dimostrato con molta precisione, che per i calcoli astronomici, basta ridurre colle medie aritmeticamente proporzionali le differenze seconde, o al più le terze, ad essere costanti.

3.° Che in questi casi l'interpolazione non sarà che approssimata; e perchè approssimi sempre più nel determinare col nostro metodo il termine generale delle serie, converrà usare certe avvertenze, che suggerirà l'esperienza, e l'uso del calcolo; le principali sono di prendere per a' il termine m^{esimo}, tra il quale, e l'$(m+1)^{esimo}$ si deve determinare l's^{esimo} degli r; così il b' sarà la differenza dell' m^{esimo}, e dell' $(m+1)^{esimo}$, il c' sarà ....., ed il numero $m+\frac{s}{r+1}$ da sostituirsi in TA' invece di m, si trasformerà in $1+\frac{s}{r+1}$; questi sono compedj del num. 138.

141. Il Sig. Mouton è stato il primo a proporre il problema delle interpolazioni nell' anno 1670. Non si tardò a conoscere di quanta importanza esso fosse per tutta la Matematica pura, e mista; ed i migliori Matematici di questo secolo hanno

 preso

preso ad illustrarlo, ed a scioglierlo con metodi tutti tra se diversi, e tutti degni del vasto loro intendimento. Siano date due serie qualunque di quantità tali, che a ciascun termine d'una serie corrisponda con data legge un termine dell' altra; e si chiamino *funzioni* i termini della prima serie, e *radici* i termini della seconda: *Data una radice qualunque si cerca la funzione corrispondente, e data una funzione qualunque si cerca la corrispondente radice*. Questo problema è stato sciolto analiticamente dal Mayer (Acad. Petr. T. 2. p. 180.), e le formole del Mayer sono state ridotte a più semplice forma dall' Abbate La-Caille (Astr. Sol. P. 1. Sez. 1.). Il Newton (libr. 3. Princ. & Arit. Univ.); ed il Cotes (de Cal. diff. Newt.), rappresentando le radici con ascisse d'una curva, e le funzioni colle corrispondenti semi-ordinate ridussero alla geometría il problema medesimo: *Descrivere una linea curva di genere parabolico, che passi per punti comunque dati*. Aggiungi a questi il celebre Stirling verso il fine dell' egregio suo trattato sulle interpolazioni delle serie. Puoi ancora leggere i Commentarj sul sec. libr. di Newton (num. 75. 76. 77.) de' PP. Le Seur, e Jacquier, ed altri, ch' io qui non nomino per brevità.

142. Io mi sono presa la cura di leggere attentamente tutti i metodi de' citati Autori, e di ben penetrare le diverse strade, per cui ciascuno s'avvia al medesimo termine; ma finalmente sono entrato nel pensiere del Sig. De La Lande (Astron. l. 24. num. 3172.), cioè, che tutti, o la maggior parte di que' metodi non potevano mai essere d'un uso famigliare, comunque il problema delle interpolazioni sia assai frequente nella Matematica, principalmente nell' Astronomía. Il principale loro difetto si è di non potere per lo più determinare veruno de' termini intermedj senza conoscere, e passare per i termini precedenti, con infinite, e nojosissime sostituzioni. Credo, che il mio metodo per ciascuna classe, ed ordine di serie supplisca generalmente

mente a questo incomodo; i calcoli mi sembrano facili, e brevi più di quello, forse, si poteva sperare.

143. Non voglio qui ommettere due elegantissimi metodi per interpolare le serie aritmetiche, almeno fino alle terze differenze *inclusive*; questi sono i soli trai già pubblicati, che all' evitare tutti gli inconvenienti de' primi, congiungono una maravigliosa brevità nell' espressione, ed una eguale facilità ne' calcoli. Suppongo qui ancora, che si cerchi un intermedio tra l' m^{esimo}, e l' $(m+1)^{esimo}$ della data serie aritmetica. Il primo metodo si trova usato, ma non dimostrato, nè esposto in tutta la sua generalità pel secondo caso d'un problema de' logaritmi logistici nel tanto famoso libro intitolato: *Table of Logarithms* di Villelmo Gardinero (Londra. 1742.). Si chiami a, ciocchè per noi è $\frac{s}{r+1}$, si chiami b, ciocchè in nostro linguaggio sarebbe $\frac{s}{r+1}-1$, e finalmente si chiamino d', d'', d''' le differenze prime, seconde, e terze de' numeri dati. La quantità x da aggiungersi al m^{esimo} per avere il termine cercato, sarà

Per le seconde differenze

$$x = (d' + \frac{1}{2} b d'') a$$

Per le terze differenze

$$x = (d' + \frac{1}{2} b d' + \frac{1}{6} d''' . \overline{b + b^2}) a.$$

L'altro metodo è del più volte citato Sig. De La Lande (Acad., ed Astr. luogo citato). Chiama egli p il nostro s, chiama m il nostro $r+1$, d la differenza del termine m^{esimo}, ed $(m+1)^{esimo}$, tra i quali si cerca il p^{esimo}, e d^2, d^3 le differenze seconde, e terze de' dati termini. La quantità x da aggiungersi all' m^{esimo} per avere il termine cercato, sarà

Per

Per le differenze feconde

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p-m}{2}\cdot\frac{d^2}{m^2}$$

Per le differenze terze

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p^2-m^2}{6}\cdot\frac{d^3}{m^3}$$

144. Si noti: 1.° Che nelle formole del Gardinero, d' è pofitivo, quando i termini difpofti per l'interpolazione vanno crefcendo; d'' è parimenti pofitivo, quando le prime differenze vanno fcemando; d''' è fimile a d'', quando le feconde differenze vanno fcemando, altrimenti avrà un fegno contrario a d''. 2.° Che nelle formole del De La Lande il primo termine è in amendue lo fteffo, ed è il quarto proporzionale dell' analogía $m:d::p:$ al quarto, ed il fecondo termine è in amendue diverfo. La variazione de' fegni in quefte formole fono fimili a quelle del Gardinero.

145. Effendo generali le formole del Gardinero, del De La Lande, e le mie, non poffono effere diverfe, che nell' efpreffione; così tutte le ftrade, per cui gli Analifti cercarono la foluzione delle equazioni di terzo grado andarono a terminare fempre nella formola Cardanica. E di fatti le differenze prime, feconde, terze, fono indicate

dal Gardinero per	d', d'', d'''
dal Sig. De La Lande per	d, d^2, d^3
da me per	b, c, d;

gli a, b del Gardinero fono gli $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}-1$ del Sig. De La Lande; ed il mio valore di m da foftituirfi invece di m in TA', cioè (num. 140. 3.°) $1+\frac{s}{r+1}$ fi riduce all' $1+\frac{p}{m}$ del Sig. De La Lande, ed al $1+a$ del Gardinero; del refto le formole fono tutte identiche.

146. Ma:

146. Ma: il mio metodo 1.º non si ristringe solo alle serie aritmetiche, ma indefinitamente a qualunque ordine, o genere di serie, di cui assegnare si possa il termine generale.
2.º Applicato alle serie aritmetiche, si possono usare le differenze quarte, quinte, n^{esime}, con quella facilità, con cui nel mio, e negli altri due metodi si usano le differenze seconde, e terze, vedendosi subito in TA' la legge de' termini.

3.º Sostituendo nel mio TA' il numero $1+\frac{p}{m}$, oppure $1+a$ invece di m, ed indicando colle lettere del Sig. De La Lande, o con quelle del Gardinero le differenze de' dati termini, si formeranno facilmente le formole per le differenze più alte, secondo il metodo di questi Autori; formole, che non si saprebbero per altra via determinare senza un calcolo assai prolisso, ed intralciato.

Nota al fine.

AL num. 51. ho esposto un teorema per isciogliere una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore un prodotto di più fattori qualunque, in più frazioni, ciascuna delle quali abbia per numeratore la stessa unità, e per denominatore abbia uno de' medesimi fattori.

Per dimostrare quel teorema ho seguito il metodo indicato dalla Sig.ra Agnesi, di ridurre allo stesso denominatore la frazione data, e la somma delle derivate da essa, riuscendo la dimostrazione facilissima nel caso di due soli fattori espresso da essa Sig.ra Agnesi, ma che sale ad un numero di termini impraticabile, per poco, che cresca il numero de' medesimi fattori. Riflettendo dappoi ad un metodo di dimostrar questa regola comunicatomi in una sua lettera dal P. Francesco Gianella giovane Gesuita ben avvanzato in questi studj, trovo la dimostrazione medesima assai semplice, e corta, servendo sempre la formola pre-

precedente dimostrata, insieme con quella de' due soli fattori per andare avanti alla seguente, in cui vi sia un fattore di più.

I.° *Caso* $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$

Imperocchè $\frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)}$

$$= \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy}$$

Si sono solamente mutati i segni nel secondo termine, indi fatta la somma dopo la riduzione allo stesso denominatore, si è diviso il numeratore, e il denominatore per lo stesso $y-x$.

Nel seguente caso di tre fattori, si scioglierà la formola de' primi due in due, indi ciascuna di queste due in altre due, e ne nasceranno quattro, ma le due ultime de' due binarj si mostreranno uguali ad una sola terza.

II.° *Caso* $\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xy}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{xz(y-x)} + \frac{1}{yz(x-y)},$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{y-z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xz(y-x)} = \frac{1}{x(z-x)(y-x)} + \frac{1}{z(x-z)(y-x)},$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{x-y}$, *si ha*

$$\frac{1}{yz(x-y)} = \frac{1}{y(z-y)(x-y)} + \frac{1}{z(y-z)(x-y)}$$

Ora i primi due termini di questi binarj un per uno sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione appartenente al caso II.°, *avendo*

avendo gli stessi binomj, *benchè traspoſti*, *e il termine di esso membro qui è uguale a' due ultimi*; *giacchè sciogliendo* $\frac{1}{(x-z)(y-z)}$, *e multiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha* $\frac{1}{z(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(x-z)(y-x)} + \frac{1}{z(y-z)(x-y)}$. *Basta riflettere*, *che* $(y-z)-(x-z)=(y-x)$, *ed* $(x-z)-(y-z)=(x-y)$.

III.° *Caso* $\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xyz}$ *pel caso* II.°, *si ha*

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{xv(y-x)(z-x)} + \frac{1}{yv(x-y)(z-y)} + \frac{1}{zv(x-z)(y-z)}$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xv}$, *si ha*

$$\frac{1}{xv(y-x)(z-x)} = \frac{1}{x(v-x)(y-x)(z-x)} + \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)}$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yv}$, *si ha*

$$\frac{1}{yv(x-y)(z-y)} = \frac{1}{y(v-y)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)}$$

4.° *sciogliendo* $\frac{1}{zv}$, *si ha*

$$\frac{1}{zv(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(v-z)(x-z)(y-z)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}$$

Ora i primi tre termini di questi tre ternarj sono gli stessi, *che nel secondo membro dell' equazione del caso* III.°, *avendo gli stessi binomj*,

nomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quarto di esso è uguale qui a' tre ultimi; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-v)(y-v)(z-v)}$, *e facendo la stessa riflessione al residuo dalla sottrazione di un fattore dall' altro, si ha* $\frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)} = \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x} +$

$$\frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}.$$

IV.° *Caso* $\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)(t-x)}$

$$+ \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)(t-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)(t-z)}$$

$$+ \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)(t-v)} + \frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xyzv}$ *pel caso* II.°, *si ha*

$$\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{vt(x-v)(y-v)(t-v)}$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xt}$, *si ha* $\frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)}$

$$= \frac{1}{x(t-x)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)}$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yt}$, *si ha* $\frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$

$$= \frac{1}{y(t-y)(x-y)(z-y)(v-y)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

4.° *scio-*

4.° *sciogliendo* $\frac{1}{zt}$, *si ha* $\frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)}$

$$= \frac{1}{z(t-z)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)}$$

5.° *sciogliendo* $\frac{1}{vt}$, *si ha* $\frac{1}{vt(x-v)(y-v)(z-v)}$

$$= \frac{1}{v(t-v)(x-v)(y-v)(z-v)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Ora i primi quattro termini di questi quattro binarj sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione del caso IV.° avendo gli stessi binomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quinto di esso è uguale qui a' quattro ultimi; giacchè sciogliendo

$\frac{1}{(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$ *colla stessa riflessione al residuo della sottrazione di un fattore dall' altro, si ha* $\frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$

$$= \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Così si anderebbe avanti ad un numero maggiore di fattori, servendosi sempre della formola precedente per la seguente.

Per dimostrare la formola de' fattori m *si scioglie la precedente delli* m — 1 *in frazioni* m — 1. *Indi colla formola di due fattori si scioglie ognuna di esse in altre due. Le prime di tutti questi binarj di frazioni saranno le stesse, che le prime* m — 1 *della formola, che si deve dimostrare: tutte le seconde insieme si trovano uguali alla sola ultima di essa formola, dividendo anche questa colla formola de' fattori* m — 1 *non più più semplici, ma binomj, tali però, che sottraendo*

 cia-

ciascun di essi da' suoi compagni, ne nascono alcuni binomj colla ellisione di un termine comune. Il calcolo riesce trattabilissimo, anzi semplice. Si vede anche da questo esempio, quanto importi il pigliar una dimostrazione pel verso suo: un metodo porta giri lunghissimi, e un altro scorta la strada, e riduce ad una maravigliosa semplicità le cose, che prese con altro metodo riescono complicatissime.

AG-

AGGIUNTA
DI DUE MEMORIE
DEL PADRE
RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH
DELLA COMPAGNIA DI GESU'

PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA
NELLA REGIA UNIVERSITA' DI PAVIA.

MEMORIA PRIMA.

Metodo di evitare i logaritmi negativi.

1. IN tutte le forme de' logaritmi, che sono in uso, come in quelli delle tavole comuni, e negli iperbolici, il logaritmo di ogni frazione è negativo, la quale cosa disturba il calcolo, essendo molesta la sottrazione delle mantisse formate da varie figure decimali, e convenendo nelle somme sommar da se i positivi, indi da se i negativi, e poi sottrarre la somma minore dalla maggiore, triplicandosi così in certa maniera il calcolo. Quindi torna bene l'avere qualche metodo da evitare i logaritmi negativi, come già da varj anni si è cominciato a praticare, e vi vogliono delle regole sicure, e facili per non errare nella pratica.

2. Si otterrà facilmente questo fine, se al logaritmo di qualunque frazione se ne sostituisca un altro, il quale nasca da un' aggiunta, che se gli fa, senza, che questa aggiunta turbi il calcolo, ove si badi a quello, che si è aggiunto per tenerne conto al luogo debito.

3. Due sorti di frazioni distingueremo: La prima sorte sarà della forma decimale, in cui dopo la virgola divisoria, o venga immediatamente una delle 9 figure significanti, o vi sieno degli zeri, e chiameremo n il numero totale delle figure decimali, N l'intero espresso dalle medesime prese senza la virgola divisoria: tanto nella frazione 0, 752, quanto nella 0, 00752 sarà $N=752$; ma nella prima $n=3$, nella seconda $=5$. La seconda sorte di frazioni sarà della forma $\frac{1}{B}$, o B sia un intero, o un rotto decimale; benchè in questo secondo caso facilmente si riduce alla forma $\frac{C}{B}$; mentre se $B=\frac{N}{(10)^n}$, sarà $\frac{1}{B}=\frac{(10)^n}{N}$;

ma

ma noi sempre la considereremo sotto la forma, in cui il numeratore sia $= 1$.

4. In ordine alle espressioni decimali noterò qui particolarmente quello, che per altro è cosa cognita, e appartiene generalmente anche agli interi. *La sola mantissa determina le figure del numero corrispondente ad un logaritmo, e viceversa: la carateristica determina il sito della virgola divisoria rispetto ad esse; e ne viene determinata*. Se la caratteristica sarà r, dipende tutto dal valore della formola $r + 1$. Se questa è $= 0$, essendo $r = - 1$, le figure vanno subito dopo la virgola, senza zeri immediati dopo di essa: se contiene un numero negativo coll' essere r negativo maggiore dell' unità, vi vogliono dopo la virgola immediati tanti zeri, quante unità essa esprime: se contiene un valor positivo, altrettante di quelle figure si devono pigliar per l' intero, supplendo con degli zeri al fine, se non bastano, o mettendo le residue dopo la virgola per decimali, se avvanzano.

5. Se si cerca la corrispondenza delle figure colla mantissa, conviene andare al fin della tavola, e cercarla fra que' numeri, che abbiano il massimo numero di figure, a cui si stendono esse tavole, ove o si troverà esatta, o si potrà cercare più prossima col metodo usato delle differenze proporzionali, o anche delle interpolazioni. Siccome il logaritmo di un numero A si scrive $l A$, la sola mantissa si può qui dinotare per $p A$.

6. Ora pel nostro fine di evitare i logaritmi negativi aggiungeremo qui in amendue queste sorti di frazioni al logaritmo volgare il 10, bastando questo, come è facile a vedere, per tutte quelle, che non sono minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$: le minori non sogliono occorrere nell' uso ordinario, e quando occorrano per qualche caso straordinario, daremo il metodo di evitare anche allora i logaritmi negativi. Il logaritmo così accresciuto lo chiameremo *gran logaritmo*, esprimendolo per $L A$.

7. Con-

7. Confidereremo ancora il complemento logaritmico di un numero, il quale si forma, sottraendo dal 9 tutte le precedenti figure del suo logaritmo, e l'ultima dal 10, ciocchè si fa facilmente, pigliando immediatamente dalle tavole invece delle figure ivi notate il complemento di quelle al 9 di questa al 10. Questo complemento logaritmico lo dinoteremo per $l'A$.

8. Dalle posizioni fatte, facilmente si ricavano le seguenti formole: 1.° $l'A = 10 - lA$, 2.° $lA = 10 - l'A$, 3.° $LA = 10 + lA$, 4.° $lA = -10 + LA$, 5.° $L\frac{1}{A} = l'A$, 6.° $L\frac{1}{A} (= l'A) = n + l'N$, ove sia $A = \frac{N}{(10)^n}$.

La prima nasce dalla definizione del complemento logaritmico (n. 7.): La seconda vien dalla prima trasponendo: La terza dalla definizione del gran logaritmo (n. 6.): La quarta dalla terza pur trasponendo: La quinta dalla 3, e 1 così: $L\frac{1}{A} = 10 + l\frac{1}{A} = 10 - lA = l'A$: La sesta dalla prima così. Essendo $A = \frac{N}{(10)^n}$, sarà $lA = -n + lN$, e $l'A = 10 + n - lN = n + l'N$.

9. Si ha inoltre, che *la mantissa del gran logaritmo è la stessa, che del volgare*; giacchè nella formola 3. si muta la sola caratteristica coll' aggiunta di 10.
Per la caratteristica r la formola sarà $r - 9$. Se sarà $r - 9 = 0$, cioè $r = 9$; sarà per la quarta formola la caratteristica di $lA = 9 - 10 = -1$, caso, in cui (n. 4.) tutte le figure dovute alla mantissa vanno subito dopo la virgola senza zeri. *Quindi*, *se* $r - 9 = \pm t$, *sarà* t *il numero delle figure intere avanti alla virgola*, *o degli zeri immediati dopo di essa*.

10. Dalle cose dimostrate si ricavano le seguenti tre regole fondamentali.

 I. Il

I. *Il complemento logaritmico di un numero intero, si ha pigliando nelle tavole comuni il complemento di ogni figura precedente del suo logaritmo al 9, e dell'ultima al 10, e per un numero decimale di n figure, basta il pigliare i complementi suddetti pel logaritmo del numero espresso dalle stesse figure, e aggiungere n alla caratteristica.*

II. *Per avere il gran logaritmo di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, si piglj il complemento logaritmico del suo denominatore.*

III. *Per avere il gran logaritmo di una frazione decimale, si piglj la mantissa del numero intero espresso dalle sue figure colla caratteristica 9, o se ha un numero* t *di zeri immediati dopo la virgola,* $9 - t$.

Della prima la prima parte si ha dalla definizione del complemento aritmetico, la seconda parte dalla formola sesta: La seconda regola è contenuta nella formola quinta: La terza nella sesta.

11. Passando alle potenze, e radici: Se A esprime una frazione, o dell'una, o dell'altra sorte, si avrà

$$L A^m = -10(m-1) + m L A.$$

Imperocchè $L A^m = 10 + l A^m = 10 + m l A =$ (formola 3.) $10 - 10m + m L A = -10(m-1) + m L A$.

12. Se invece di una potenza intera si abbia una radice m, basterà mettere $\frac{1}{m}$ invece di m. Quindi

$$L A^{\frac{1}{m}} = -10\left(\frac{1}{m} - 1\right) + \frac{1}{m} L A = \frac{10(m-1) + L A}{m}.$$

Ne nascono altre due regole

IV. *Per avere il gran logaritmo di una potenza* m *di una frazione, si moltiplichi per* m *il suo gran logaritmo, e si levi dalla sua caratteristica* $10(m-1)$.

V. *Per*

V. *Per averlo di una radice* m , *si aggiunga alla caratteristica del suo gran logaritmo* 10 (m — 1), *indi il tutto si divida per* m.

13. Metteremo qui gli esempj corrispondenti alle regole.

$m = 3 \quad A = \frac{1}{752}$	$A = \frac{1}{0.00752}$ $n = 5$	$A = 0,00752$ $t = 2$
$l\,752 = 2,\ 87622$	$l'\,752 = 7,\ 12378$	$p\,752 = 0,\ 87622$
	$n = 5$	$9 - t = 7$
$LA = l'\,752 = 7,\ 12378$	$LA = 12,\ 12378$	$LA = 7,\ 87622$
3	3	3
21, 37134	36, 37134	23, 62866
— 20	— 20	— 20
$LA^3 = 1,\ 37134$	$LA^3\ 16,\ 37134$	$LA^3\ 3,\ 62866$
$LA = 7,\ 12378$	12, 12378	7, 87622
20	20	20
27, 12378 | 3	32, 12378 | 3	27, 87622 | 3
$LA^{\frac{1}{3}} = 9,\ 04126$	$LA^{\frac{1}{3}} = 10,\ 70793$	$LA^{\frac{1}{3}} = 9,\ 29207$

14. Vi sia ora un valore $A = \frac{B\,C\,D\,A \ldots ec.}{M\,N\,P \ldots ec.}$, e si cerchi LA.

Si avrà $LA = 10 + lA = 10 + lB + lC$ ec. $- lM - lN$ ec. In questa formola se tra' fattori B, C, D ec. vi sono de' rotti, si avranno i logaritmi negativi, e i logaritmi di M, N ec. dovendosi sottrarre, vengono a turbare, come se fossero negativi. Quindi servendosi della 4., e 6. formola del num. 8., e considerando i divisori, come fattori della forma $\frac{1}{M}$, se sia m il numero di tutte le quantità, converrà dalla somma di tutti i gran logaritmi levare $10\,m$, e aggiungervi 10. Così si avrà

$$LA = -10\,(m-1) + LB + LC + LD \text{ ec.} + l'M + l'N + l'P \text{ ec.}$$

15. Pel

15. Pel fine, che si ricerca, non occorre pigliare i gran logaritmi de' fattori interi del numeratore, per poi sottrarli nel $-10(m-1)$; ma basta pigliarli ne' soli fattori frazionarj, o sieno decimali del numeratore, o nascano dalla unità divisa per ogni fattore del denominatore. Si avrà la seguente regola.

VI. *Per avere il gran logaritmo di una formola semplice, che abbia nel numeratore fattori decimali* m, *e nel denominatore fattori qualunque* n, *si piglino i logaritmi volgari di tutti gli interi del numeratore, i gran logaritmi delli decimali di esso, e i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, e fattane la somma, si levi dalla sua caratteristica* $10(m+n-1)$.

$$A = \frac{2347 \times 358 \times 0,275 \times 0,00752}{37 \times 249 \times 00153} \quad m=2,\ n=3$$

$$\begin{array}{llll}
l\ 2347 & = 3,37051 & & \\
l\ 358 & = 2,55388 & & \\
L\ \ 0,275 & = 9,43933 & & \\
L\ \ 0,00752 & = 7,87622 & & \\
l'\ 37 & = 8,43180 & & \\
l'\ 249 & = 7,61320 & & \\
l'\ \ 0,0153 & = 8,18469 & & \\
 & \ \ 45,58963 & & 0,58963 = p\ 3887 \\
-10(m+n-1) & = -40 & & 5-9=-4 \\
LA & = \ \ 5,58963 & & A = 0,00003887 \ \text{(n. 9.)}
\end{array}$$

16. Se vi fossero state delle potenze de' rotti, o delle radici; si sarebbero trovati i loro gran logaritmi colle regole 5, e 6, e si sarebbero adoprati al modo stesso.

17. La sottrazione, che si è fatta qui nella caratteristica, essendo di un corto numero di diecine, si poteva fare senza scriverla, levando via nel portar le diecine per la somma quel-

le

le 4., che corrispondevano alle 5. frazioni, e così si usa realmente. Si usa anche, senza adoprare il segno L, di mettere il segno l, e scrivere non il logaritmo volgare, ma l'accresciuto di una diecina, che io ho qui chiamato gran logaritmo. Dove vi sono i divisori, io sono pur solito, come ho fatto qui, per evitare la sottrazione de' loro logaritmi, servirmi de' complementi logaritmici, evitandosi così la sottrazione di una mantissa dall' altra, la qual cosa può farsi ogni volta, che occorra di dover sottrarre qualche logaritmo: in questo caso non può scriversi nell' esempio proposto senza falsità $l\ 37 = 8,43180$, ma, o conviene dare un segno al complemento logaritmico, come ho fatto, mettendo un l' accentato, o conviene scrivere $l\ \frac{1}{37}$, se invece di l' si vuole scrivere l.

18. Basta dunque, comunque uno voglia scrivere, (benchè per le diverse cose sia meglio adoprar diversi segni), basta, dico, badar a *prendere i logaritmi volgari de' fattori interi del numeratore, i logaritmi accresciuti di 10 de' rotti decimali, i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, accrescendo, se questi son decimali, i complementi dell' intero da essi espresso, nelle caratteristiche di tante unità, quante sono in tutto le figure di ciascuno, indi nel far la somma levare tante diecine, da quelle, che si porterebbero indietro, quante conviene, scrivendo il residuo. Per avere il logaritmo volgare bisognerebbe levarne tante, quanti sono stati in tutto i fattori frazionarj del numeratore, e i fattori qualunque del denominatore, e allora se la caratteristica rimane* 1, *le figure avranno interi avanti alla virgola, o zeri dopo di essa* 1 — 1 (n. 4.), *secondo che sarà positivo, o negativo un tal valore, rimanendo le cose nello stato della teoria comune de' logaritmi.*

19. *Se ciò non si può, perchè il numero delle diecine sia maggiore*, (come lo sarebbe nel proposto esempio, in cui si portavano 4. diecine, che ânno dato il 45. nella caratteristica, e per avere il

il logaritmo volgare se ne sarebbero dovuti levare 5, per li 5 fra rotti nel numeratore, e fattori nel denominatore) *allora vanno levate diecine una meno* (come si è fatto qui, levandone 4), *rimane quello, che abbiamo chiamato gran logaritmo, che dà il numero cercato, dando colla mantissa le figure, e determinando la sede della virgola colla formola* r − 9 (n. 9.). Qui nell' esempio posto al n. 15. si è così trovato di fianco il numero A, in cui essendo $r-9=5-9=-4$, si sono messi dopo la virgola 4. zeri, pigliando 0, 00003887 pel valore cercato di A.

20. Può darsi il caso, che non si possano sottrarre neppure tante diecine una meno, come sarebbe seguito qui, se la somma delle caratteristiche fosse stata 35, o 25. In tal caso non si sarebbe evitato un negativo, e converrebbe, se non si usa altro artificio, mutar anche la mantissa, ed avere un logaritmo negativo col sottrarre all' opposto la trovata somma da 40, 00000. Ciò accaderebbe per la troppa piccolezza del numero corrispondente al logaritmo, a cui non arriva la forza del 10 aggiunto (n. 6.). Vi è però un artificio facile ivi promesso per evitare anche allora la sottrazione delle mantisse. *Basta levare quante diecine si può, e mettere innanzi alla caratteristica col segno negativo quelle diecine di più, che non si sono sottratte; indi nel numero alli zeri dati da* r − 9 *aggiungere altrettante diecine di zeri*. Imperocchè se quel residuo si dica r', e le diecine non sottratte sieno t; sarà l'intero $r=r'-t$, onde $r-9$ avrà −20 di più del semplice $r'-t$.

21. Se fosse venuta la somma 25, 58963; non potendosi levare 4 diecine, si sarebbe potuto scrivere −20 + 5, 58963, e il numero A, invece di avere zeri 4, ne avrebbe dovuti avere 24. Al modo stesso nel primo esempio del n. 13., se si fosse cercata la ottava potenza di $A=\frac{1}{752}$, moltiplicando $LA=7$, 12378 per 8, si sarebbe avuto 56, 99024, e si sarebbe dovuto

sot-

fottrarre 70. Conveniva fcrivere $-20+6,99024$, e dove al $LA^1 = 1,37134$ corrifpondeva $A^1 = 0,000000002351$ con otto zeri per effere $1-9=-8$, per A^1 vi farebbero voluti dopo la linea zeri 23 prima di 9778, per effere $6-9=-3$, e $-20-3=-23$.

22. Lo fteffo anderebbe praticato in ogni altra congiuntura, in cui per le regole fuddette veniffe nella caratteriftica un numero maggiore da doverfi fottrarre da un minore: o converrebbe tener a mente il numero delle diecine, che non fi fono potute fottrarre, o per non dimenticarfene, anderebbero piuttofto fegnate innanzi col fegno negativo; ma quefto ripiego non farà mai neceffario, fuori che ove occorrano frazioni minori delle efpreffe da una figura, che fia la decima dopo la virgola, cioè di $\frac{1}{10000000000}$.

23. L'aggiunta, che fi è fatta di 10 al logaritmo volgare di un numero per mutarlo in un altro, che fi è qui chiamato gran logaritmo, fe fi faceffe a tutti i logaritmi delle tavole comuni, fi avrebbero nuove tavole di una forma di logaritmi ricavata da una idea di effi più generale. Comunque una progreffione geometrica fi combini con un'aritmetica, fi ponno i termini di quefta chiamare logaritmi de' termini corrifpondenti di quella, ed effi pure avranno la proprietà, che i logaritmi di 4 termini geometricamente proporzionali fono aritmeticamente proporzionali; onde datine i primi tre, fi troverebbe il logaritmo del quarto col fottrarre il logaritmo del primo dalla fomma de' logaritmi degli altri due. Di quefta natura farebbero i logaritmi di quelle nuove tavole; giacchè un' aggiunta di un termine coftante a tutti i termini di una progreffione aritmetica non ne turba nè la natura, nè la ragion comune, e folo trafporta più indietro il limite tra i pofitivi, e i negativi.

Ma ove all' 1 non corrifponda nella progreffione aritmetica lo zero,

zero, non si ha la formola $lab = la + lb$, da cui ne vengono le altre tre $l\frac{a}{b} = la - lb$, $la^m = mla$, $la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}la$. Tutte sarebbero alterate dal logaritmo dell' unità, che converrebbe aggiungere, o sottrarre una, o più volte; giacchè essendo $1 . a :: b . \frac{ab}{1} = ab$, sarebbe $lab = la + lb - l1$. Per questo si è combinato ne' logaritmi, che sono in uso, l' 1 collo zero, acciò come quello non altera le quantità nella moltiplicazione, o divisione, così questo non le altera nella somma, o sottrazione.

24. Questo è un gran vantaggio, per l'uso grande, di cui sono que' teoremi; ma è inseparabile dallo svantaggio di avere negativi, o i logaritmi di tutte le frazioni, o (se si volessero positivi i logaritmi di queste col combinare una progressione aritmetica crescente con una geometrica decrescente) i logaritmi degli interi; mentre all' opposto ove il logaritmo dell' unità è molto grande, rimangono positivi i logaritmi di tutte le frazioni, che non abbiano un denominatore maggiore di quel logaritmo dell' unità, che nel caso nostro viene ad essere quel 10, che si è aggiunto a tutti i logaritmi volgari delle tavole comuni per farli divenire gran logaritmi, e coll' ajuto loro evitare i negativi in tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$.

25. Il disturbo, che recavano i logaritmi negativi, fu riconosciuto fino dal principio della loro invenzione, riuscendo essi molto incomodi particolarmente nella Trigonometría, in cui vengono in uso i logaritmi delle funzioni degli archi, e nelle tavole vi si mettono quelli de' seni, e delle tangenti. Desiderandosi di prendere l'unità pel raggio del circolo, o sia pel seno tutto, venivano a riuscire frazioni semplici tutti i seni, e tutte le tangenti fino a' 45. gradi, che sono minori dell' unità, rimanendo maggiori dell' unità tutte le altre tangenti, ed essendo

pur

pur maggiori dell' unità tutte quante le secanti : quindi venivano ad essere negativi i logaritmi di tutti i seni, e della metà delle tangenti, rimanendo positivi tutti quelli dell' altra metà di tangenti, e tutti quelli delle secanti.

26. Vi fu, chi riflettendo all' essere più frequente l'uso de' seni, oltrechè le tangenti, e secanti si ânno dipendentemente da essi, per essere al raggio $= 1$ tang. $A = \frac{sin. A}{cos. A}$, e sec. $A = \frac{1}{cos A}$, credette fosse cosa opportuna il combinar appunto una delle due progressioni decrescente coll' altra crescente, per avere positivi tutti i logaritmi de' seni, e ne pubblicò le tavole. Ma oltrechè vi era un qualche imbarazzo nella costituzione de' logaritmi per i seni, contrarj a quella de' numeri esprimenti i lati de' triangoli piani, e di altri valori, a' quali si passava oltre nel calcolo (benchè per altro questo era senza grande conseguenza negli usi ordinarj, ne' quali entrano i soli rapporti tra i seni, e il raggio), non si otteneva il fine pienamente, venendo sempre negativi i logaritmi della metà delle tangenti ricavate da' seni, e i logaritmi di tutte le secanti.

27. Quindi fu comunemente abbracciato l'altro partito, di abbandonare l'unità pel valore del raggio, e concepirlo diviso in un gran numero di parti, sostituendo così a quell' unità più grande, un' unità più piccola, dalla quale ripetuta molte volte fosse formata questa, e in queste unità furono trovati, ed espressi tutti i seni, tangenti, e secanti naturali, e furono inseriti nelle tavole. Bastava fare il raggio $= 1000000$ per avere espresso co' numeri interi il seno anche di un minuto secondo, che allora viene ad essere $= 48, 5$; ma per abbondare si è fatto nelle tavole più comuni $= 10000000$, onde anche un terzo ha il seno espresso con un intero venendo $= 8$.

28. Così anche i logaritmi de' seni degli angoli piccolissimi venivano ad essere positivi, rimanendo negativi quelli soli, che

 ap-

appartengono ad angoli comunemente disprezzati per la eccessiva loro piccolezza: ma il logaritmo del raggio riusciva incomodo, venendo ad essere = 7, 000 ec., numero non così comodo ad aggiungere, e levare nelle occasioni richieste dalla multiplicazione, e divisione pel raggio. Quindi per li logaritmi de' seni si concepì il raggio diviso in un numero di parti espresso da un' unità con 10 zeri, venendo così ad essere il logaritmo di esso raggio = 10 . 000 ec., benchè insieme si lasciò nelle stesse tavole diviso per li seni naturali in parti 10000000, senza che queste due unità diverse turbassero il calcolo, sì perchè i seni al raggio $(10)^7$, si riducono a que' del $(10)^{10}$ col solo aggiungere 3 zeri al fine, sì, e molto più, perchè le ragioni de' seni fra se, e al raggio, le quali sole per l'ordinario vengono considerate, rimangono le medesime, con qualunque unità si misurino, ed esprimano.

29. Questa sorte di logaritmi de' seni al raggio $(10)^{10}$, rispetto a' logaritmi de' seni al raggio = 1, sono appunto lo stesso, che i nostri gran logaritmi rispetto a' logaritmi volgari; giacchè anche qui diviene = 10 il nuovo logaritmo di quella, che prima era un' unità maggiore, ed ora è divenuto un numero grosso di unità minori, ogni seno viene espresso col numero, con cui sarebbe stato espresso essendo il raggio = 1, ma moltiplicato per $(10)^{10}$, ed ogni logaritmo uguale al logaritmo di quella ipotesi accresciuto di 10 unità nella sua carateristica.

30. Questo è stato l'unico rimedio adoprato per un pezzo per evitare nella Trigonometría i logaritmi negativi, e anche per questo si soleva introdurre nelle formolette, che per l'ordinario erano semplici, e corte, e nelle proporzioni l'espressione del raggio fatto = R, per poter tener conto del suo logaritmo, e aggiungerlo, o sottrarlo. Ma cominciato a introdursi in questi ultimi tempi l'uso delle formole assai più complicate, e più frequentemente adoprate nella Trigonometría, e in tutta l'Astro-

no-

nomía, anzi l'uso de' seni, e tangenti anche più generalmente nella Geometría per le proprietà delle curve, e nella sublime analisi per le integrazioni, si è tornato in esse a considerare il raggio $= 1$, per risparmiare la sua espressione, e rendere tanto più semplici le formole, col renderle meno caricate di simboli, ritenendo per altro le espressioni logaritmiche così, come si trovano nelle tavole comuni. Quindi realmente nelle medesime tavole si trovano per la serie naturale de' numeri i logaritmi volgari, e nelle tavole de' logaritmi, de' seni, e tangenti, (i quali logaritmi si chiamano anche seni, e tangenti artificiali) i logaritmi volgari de' seni computati al raggio $= (10)^{10}$, ma che sono que', che qui abbiamo chiamati gran logaritmi per li seni computati al raggio $= 1$, richiedendo l'uso di essi l'avvertenza al numero delle volte, che va nelle formole stesse considerata l'ommissione della espressione del raggio, la quale cosa non è difficile ad aversi, attesa l'omogeneità, che rispetto alle espressioni de' seni, e tangenti, e del raggio, devono introdurvi le proporzioni, per le quali sole essi entrano nelle medesime formole.

31. Introdotto già l'uso di considerare il raggio $= 1$, e di servirsi delle tavole comuni per li logaritmi de' seni, si è ito innanzi ad aggiungere una diecina di unità a' logaritmi delle altre frazioni, per evitare in esse ancora i logaritmi negativi; ed io qui ripigliando la cosa da' suoi principj, ho date le regole generali, le quali sono semplici, e piane, e serviranno per evitare sempre i logaritmi negativi di tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$, anzi per evitare ogni sottrazione di qualunque logaritmo, e anche nelle frazioni minori senza alcun logaritmo negativo, evitar sempre ogni sottrazion di mantissa, e rimediare con una pratica semplicissima a qualunque inconveniente, che possa occorrere ancora nelle caratteristiche.

APPENDICE

Su i Logaritmi delle quantità negative.

32. AVendo parlato nella presente Memoria de' logaritmi negativi, era troppo naturale il trattare ancora de' logaritmi delle quantità negative, su i quali si mosse già la controversia tra il Leibniz, e il Bernoulli, come si vede nel loro Commercio epistolico al tomo 2. della pag. 269., sostenendo il primo, che essi erano immaginarj, e che la logaritmica aveva un solo ramo sopra l'asse, e il secondo, che erano reali, e uguali a' logaritmi delle medesime quantità prese positivamente, avendo la stessa curva due rami infiniti sopra, e sotto l'asse uniti fra loro colla continuità geometrica. A questo fine, mentre già si stampava quest' Opera avevo studiata a fondo tutta la materia all' idea di aggiungere per modo di appendice l'esame di essa, e il mio sentimento distesο. Nello stendere l'appendice mi è cresciuta fra le mani la materia in modo, che veniva ad essere, come suol dirsi, molto maggiore la giunta della derrata. Quindi ho giudicato di fare una Memoria a parte su questo argomento, che ho già distesa, e pubblicherò altrove.

33. Intanto per chi vorrà istruirsi di questa controversia dirò qui, quali sono i documenti, che mi sono capitati in mano, appartenenti ad essa. Si rinnovò la questione nel 1746., e 1747. fra il d'Alembert, e l'Eulero, per via di lettere, che a mia notizia non ânno veduta ancora la pubblica luce, stando il primo pel Bernoulli, e il secondo pel Leibniz. Uscì in conseguenza nel 1751. nel tomo di Berlino pel 1749. una Memoria dell' Eulero, che non fa menzione di quel suo carteggio col d'Alembert, in cui crede di avere sopita per sempre la controversia coll' avere trovato, che ogni quantità ha infiniti logaritmi, i quali per le negative sieno tutti immaginarj, per le positive lo

sieno

ſieno tutti fuori di uno ſolo reale: con queſto ritrovato, crede di conciliare tutte le difficoltà, dandola così vinta al Leibniz.

34. Non ſi acquietò il d'Alembert a queſta deciſione, e non ſolo non credette dimoſtrata la ſentenza dell' Eulero, ma credette all' oppoſto di poter egli validamente ſoſtenere l'opinione contraria del Bernoulli, e pubblicò nel 1761. nel primo tomo de' ſuoi Opuſcoli una Memoria a queſto fine, in cui parla delle ſuddette ſue lettere, e riſponde a tutti gli argomenti, e difficoltà dell' Eulero.

35. Intanto nelle Memorie di Berlino del 1755. il Walmeſley aveva inſerita una Memoria ſullo ſteſſo argomento, in cui dimoſtra le ſteſſe formole dell' Eulero, ma inſiſte ſulla inutilità della queſtione, perſuaſo col Leibniz, che i ſegni non entrando ne' rapporti, non vi ſia vera proporzione tra i poſitivi, e negativi come tali, e in conſeguenza, che è coſa inutile il penſare a' logaritmi, che dovrebbero miſurare queſti rapporti.

36. Nelle Memorie di Torino vi è nel primo tomo uſcito l'anno 1759. una Memoria ſu queſto del Sig. Cav. di Foncenex, in cui ſoſtiene coll' Eulero la ſentenza del Leibniz, e dimoſtra con un terzo metodo le ſteſſe formole dello ſteſſo Eulero, ma nel ſecondo tomo per l'anno 1760., e 1761. ve n'è un' altra, in cui dopo veduta la Memoria del d'Alembert, rimane contro di lui nella parte aritmetica della queſtione, ma muta parere in ordine alla continuità de' due rami della logaritmica, quale crede di dimoſtrare con un ſuo nuovo argomento ivi prodotto.

37. Nella Enciclopedía vi è l'articolo *logaritmo* ſteſo dal d'Alembert molti anni prima, ma pubblicato nell' anno ſcorſo 1766., nel quale ſoſtiene la ſteſſa ſua opinione, accennando alcune ragioni, e rimettendoſi ad alcuni de' ſuddetti monumenti, parte de' quali ivi nomina. Inclina al fine a credere, che vi ſia dentro della lite di voce.

38. Finalmente vi è anche qualche coſa ſu queſto argomento

to ne' 12. Commentarj del P. Scarrella pubblicati l'anno scorso 1766. nel Commentario 4. dal num. 36., trattandone per occasione dell'uso, che ne viene nel volere determinare il movimento di un punto attratto ad un centro con alcune leggi di forze.

39. Io sono persuaso, che tutte le difficoltà, e contraddizioni nascano appunto dalla oscurità, e mancanza di precisione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne nascano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometría de' Greci n'è priva affatto. Tali sono a mio giudizio le idee delle quantità immaginarie, che sono assurde, dell' infinito assoluto, che mena prima a de' misterj, indi a degli assurdi, come ho fatto vedere nel terzo tomo de' miei Elementi, quelle degli infinitamente piccoli mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incorrere in errori; benchè di questi, e degli indefinitamente grandi si possano avere delle idee precise, e delle leggi sicure per bene adoprarli, come ho fatto vedere molti anni addietro nella mia Dissertazione *de natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*. Idee incerte pure, e confuse, credo, che si abbiano della natura delle quantità negative, sulla quale ancora si litiga, e molto più della idea di multiplicazione, e divisione fatta per una quantità negativa, e dell' idea di rapporto, o proporzione geometrica, ove questa parola si applichi alle quantità negative, e positive mescolate insieme: o così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali nascono de' grandi imbarazzi, massime ove l'esponente sia indefinito.

40. Sopra ogni altra cosa la lite della parte geometrica, credo, che nasca dall' essere affatto vaga, e indeterminata l'idea della continuità geometrica presa in generale. Per le curve algebraiche vi è almeno un criterio di tale continuità nella semplicità della equazione della curva, irresolubile in due, dalla multiplicazione delle quali ella nasca, donde se ne potrebbe cavare

vare una precisa deffinizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un'unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve transcendenti non vi è nè deffinizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll'altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Finisco per altro con un'avvertenza essenzialissima, ed è, che tutta questa lite non interessa punto l'uso comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Astronomía, pel quale sono stati istruiti, cioè di facilitare con sicurezza il calcolo numerico col sostituire le somme, e sottrazioni alle multiplicazioni, e divisioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se si trova è la formola $\frac{abc}{mn} - \frac{d^2 e^3}{f^4 g}$, si faccia $\frac{abc}{mn} = r$, $\frac{d^2 e^3}{f^4 g} = t$. Indi si trovi tanto l'$r$, quanto il t numeri positivi coll'ajuto de' logaritmi, pigliando $lr = la + lb + lc - lm - ln$, e $lt = 2ld + 3le - 4lf - lg$, e poi si piglj $r - t$, che si avrà l'intento senza alcun pericolo di errore, e senza che vi abbiano menoma difficoltà i difensori di amendue le sentenze, la lite de' quali risguarda principalissimamente de' punti puramente specolativi.

ME-

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. SIa l'infinitinomio $a+bx+cx^2+dx^3$ ec. da alzarsi alla potenza m. Essa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali sarà a^m, e i seguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corrispondenti a qualunque potenza x^n si troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si scriva in una riga la serie naturale de' numeri, e sotto di essi in un' altra si mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio sono loro compagne nelle potenze di x espresse da essi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . c . d . e . f . g . h . i . k . l ec.

3. Fatta questa preparazione generale, se ne faccia una particolare per i termini corrispondenti alla potenza x^n, scrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può essere composto di numeri interi, ove si comprendono anche le semplici unità, e lo stesso n parte totale di se medesimo. Ciò si farà facilmente scrivendo nella prima riga tante unità, nella seconda un binario colle unità residue, indi due binarj, e così in poi: esauriti i binarj si metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi si passi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del residuo, e al modo istesso si vada innanzi alle parti maggiori. L' esempio, che si ha qui sotto, farà schiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti saranno i modi suddetti di comporre il numero n, determinando ciascuno di essi modi il suo termine, che nell' esempio medesimo

gli

vare una precisa deffinizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un'unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve trascendenti non vi è nè deffinizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll'altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Ma in modo particolare fo vedere, in che cosa consista il nodo principale, e l'origine di tutte le contraddizioni, nelle quali si urta, nella parte analitica. Esso nodo consiste nella combinazione delle seguenti due regole comuni.

I. *I segni conformi nella multiplicazione rendono il* $+$, *i difformi il* $-$.
II. *Quando una quantità si concepisca indeterminatamente in modo, che si accosti ad un' altra oltre ogni limite, si attribuisce a questa quel valore, a cui oltre ogni limite si è accostato il valore trovato per quella.*

44. La prima di queste regole determinando i valori di $x = a^r$ nelle diverse suppofizioni di r, forma il nodo in vigore del seguente teorema, che si concepisce facilmente, ma che io rigorosamente dimostro.

 Dato

Dato un qualunque valore r, *si può trovare una frazione, che ne sia o maggiore, o minore, come uno vuole, che ne differisca di una quantità minore di qualunque dato* b *comunque piccola, e che abbia il suo numeratore, e denominatore, come uno vuole, o amendue spari, o amendue anche imparimente pari, o spari quel de' due, che si vuole, e l'altro pari.*

45. Finisco la mia ricerca con un'avvertenza essenziale, ed è, che tutta questa lite non interessa punto l'uso comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Astronomía, pel quale sono stati istituiti, cioè di facilitare con sicurezza il calcolo numerico col sostituire le somme, e sottrazioni alle multiplicazioni, e divisioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se si trova la formola $\frac{abc}{mn} - \frac{d^2 e^3}{f^4 g}$, si faccia $\frac{abc}{mn} = r$, $\frac{d^2 e^3}{f^4 g} = t$. Indi si trovi tanto l'$r$, quanto il t numeri positivi coll'ajuto de' logaritmi, pigliando $lr = la + lb + lc - lm - ln$, e $lt = 2ld + 3le - 4lf - lg$, e poi si piglj $r - t$, che si avrà l'intento senza alcun pericolo di errore, e senza che vi abbiano menoma difficoltà i difensori di amendue le sentenze, la lite de' quali risguarda principalissimamente de' punti puramente specolativi.

46. Non per questo stimo, come pensano alcuni, inutile il trattare di una tale questione, perchè serve per acquistare per istrada una quantità di notizie interessanti, e schiarire un gran numero di idee.

ME-

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. SIa l'infinitinomio $a + bx + cx^2 + dx^3$ ec. da alzarſi alla potenza m. Eſſa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali ſarà a^m, e i ſeguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corriſpondenti a qualunque potenza x^n ſi troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si ſcriva in una riga la ſerie naturale de' numeri, e ſotto di eſſi in un' altra ſi mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio ſono loro compagne nelle potenze di x eſpreſſe da eſſi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . *c* . *d* . *e* . *f* . *g* . *h* . *i* . *k* . *l* ec.

3. Fatta queſta preparazione generale, ſe ne faccia una particolare per i termini corriſpondenti alla potenza x^n, ſcrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può eſſere compoſto di numeri interi, ove ſi comprendono anche le ſemplici unità, e lo ſteſſo n parte totale di ſe medeſimo. Ciò ſi farà facilmente ſcrivendo nella prima riga tante unità, nella ſeconda un binario colle unità reſidue, indi due binarj, e così in poi: eſauriti i binarj ſi metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi ſi paſſi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del reſiduo, e al modo iſteſſo ſi vada innanzi alle parti maggiori. L'eſempio, che ſi ha qui ſotto, farà ſchiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti ſaranno i modi ſuddetti di comporre il numero n, determinando ciaſcuno di eſſi modi il ſuo termine, che nell' eſempio medeſimo

 gli

gli starà accanto di fianco. Basterà osservare le regole seguenti:
I. Per numeratore del coefficiente numerico si piglino tanti termini della progressione $m \,.\, m-1 \,.\, m-2$ ec., quante sono le parti componenti.
II. Per denominatore si piglino altrettanti termini della serie naturale $1 \,.\, 2 \,.\, 3$ ec., la quale però si ricominci sempre da capo dall' 1, ovunque si muta la grossezza della parte.
III. Per coefficiente letterale si metta prima a alzato alla potenza m meno il numero delle parti, indi le lettere b, c, d ec. compagne di esse parti nella preparazione generale; onde se una parte sarà ripetuta più volte, si metterà la lettera compagna coll' esponente, che esprima il numero di quelle parti uguali.

Esempio $n=6$

$1.1.1.1.1.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} a^{m-5} b^6$

$2.1.1.1.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{m-5} b^4 c$

$2.2.1.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2} a^{m-4} b^2 c^2$

$2.2.2 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-3} c^3$

$3.1.1.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-4} b^3 d$

$3.2.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 1} a^{m-3} bcd$

$3.3 \quad \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2} d^2$

$4.1.1 \quad \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 2} a^{m-3} b^2 e$

4 . 2 $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} c e$

5 . 1 $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b f$

6 . $\frac{m}{1} a^{m-1} g$

5. Il primo termine ha nel numeratore 6. termini della progreſſione $m \cdot m-1$ ec., perchè 6. ſono le parti 1 . 1 . ec., le quali eſſendo tutte uguali, il denominatore ha 6. termini della ſerie 1 . 2 . 3 . ec. continuata. Le 6. parti danno anche a^{m-6}, le quali tutte corriſpondendo al b, ſi ha b^6.

6. Nel terzo termine ſi ſanno nel numeratore 4. termini coll' a^{m-4}, per eſſer 4. le parti, e come eſſe dopo la ſeconda paſſano da 2 all' 1, ſi ha nel denominatore 1 . 2 . 1 . 2, ripigliando da capo la ſerie: b^2 c^2 ſono compagne delle parti 1 . 1 . 2 . 2.

7. Nel ſeſto termine le tre parti 3 . 2 . 1 ſono tutte diverſe, e però il denominatore torna ſempre da capo coll' 1 . 1 . 1.

8. La dimoſtrazione di queſto metodo dipende dalle leggi delle combinazioni. Per alzare l'infinitinomio dato alle potenze ſuperiori, conviene andarlo multiplicando per ſe medeſimo. Come le lettere a, b, c ec. ſi trovano tutte di una ſola dimenſione in eſſo, è coſa manifeſta, che nel quadrato ſaranno tutte combinate a binarj, nella terza potenza a ternarj, e così in poi; onde il coefficiente letterale dovrà in ogni termine avere dimenſioni m, ed è coſa chiara, che il primo termine ſempre conterrà il ſolo valore a, onde ſarà a^m.

9. Negli altri colle lettere b, c, d ec. vi verrà x alzato alle potenze loro compagne; onde in ogni termine la potenza x ſarà la ſomma di tutti i numeri compagni di dette lettere. Quindi dovendovi eſſere tutte le loro poſſibili combinazioni,

 giac-

giacchè tutte si moltiplicano per tutte ; la potenza n qualunque dovrà avere i termini corrispondenti a tutti i modi, ne' quali il numero n può essere formato da' numeri 1.2.3 ec., e in essi le lettere compagne delle parti componenti, le quali coll' a dovendo empire le dimensioni m, dovrà l'a per esponente avere m meno il numero di dette parti.

10. Così rimane dimostrata la 3. regola : le prime due si dimostrano in quest' altro modo. Il coefficiente numerico deve esprimere il uumero di tutte le combinazioni possibili dello stesso numero m di lettere a, b, c, d ec. ripetute, quanto porta l'esponente di ciascuna. Quindi per trovare il coefficiente numerico, basterà il trovare un tale numero di combinazioni. Ciò si farà nel seguente lemma, e suoi corollarj.

11. Lemma. Se debba collocarsi un numero m di termini a, b, c ec. mutati i loro siti comunque, e si cerchi il numero di tutte le combinazioni possibili; si consideri, che posto il primo comunque, si potrà mettere il secondo in due siti, cioè innanzi, o dopo : il terzo in 3, cioè innanzi al primo, dopo di esso, e dopo il secondo ; e così sempre in poi ogni termine nuovo in un sito di più, cioè innanzi al primo de' già collocati, o dopo di esso, e dopo qualunque de' seguenti. Quindi il numero di tutte le combinazioni sarà il prodotto della serie $1.2.3 \ldots . m$.

12. Corol. 1. Se vi sia fra essi termini un numero r di termini, che non debbano mutarsi fra loro, ma tenendo essi lo stesso ordine scambievole, debbano solamente mutarsi gli altri tutti tanto rispetto a se stessi, quanto interponendosi comunque fra quelli ; il numero delle combinazioni si avrà dividendo la serie $1.2.3 \ldots . m$ per la serie $1.2.3 \ldots . n$.

13. Imperocchè per avere l'intero numero delle combinazioni, per ogni combinazione degli altri termini, converrebbe inoltre, tenuti essi immobili a' loro posti, mutare fra loro in

tutte

tutte le maniere possibili que' termini, che non si mutavano, le quali maniere pel lemma sono $1 . 2 . 3 \ldots . n$, e il numero di quelle multiplicato pel numero di queste darebbe il numero intero $1 . 2 . 3 \ldots . m$. Quindi questo diviso per $1 . 2 . 3 \ldots . n$ darà il numero cercato.

14. Corol. 2. Se il numero di tutti i termini sia m, e il numero di quelli, che mantengono il suo ordine scambievole senza mutarsi sia $n = m - r$, il numero di tutte le altre combinazioni sarà il prodotto del numero r di termini della serie $m . m - 1 . m - 2$ ec.

15. Imperocchè $\frac{1 . 2 . 3 \ldots m - r . m - (r - 1) \ldots m - 2 . m - 1 . m}{1 . 2 . 3 \ldots m - r}$ $= m . m - 1 . m - 2 \ldots m - (r - 1)$, dove vi è dopo il primo termine un numero di termini $r - 1$, e però includendo lo stesso primo, se ne ha il numero r.

16. Corol. 3. Se vi saranno inoltre altre somme di termini, che non si debbano mutar fra loro, e in una il loro numero sia t, in un' altra u ec.; il numero delle combinazioni si dovrà per la stessa ragione scemare ancora, dividendolo pel prodotto de' termini $1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u$ ec.

17. Quindi in quel caso il numero delle combinazioni sarà $\frac{m . m - 1 . m - 2 \ldots . m - (r - 1)}{1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u \text{ ec.}}$

18. Poste queste regole delle combinazioni, si vedrà subito la dimostrazione della prima, e seconda regola proposta pel coefficiente numerico.

19. Se nel fare la multiplicazione successiva, richiesta per l'elevazione del dato infinitinomio, si mette sempre la nuova lettera multiplicante avanti a tutte quelle, che già si trovano ne' termini della potenza precedente, i quali devono multiplicarsi; è cosa manifesta, che tutti i valori dissimili verranno mescolati fra loro in tutte le maniere possibili, e combinati co-

mun-

munque colli ſimili ; ma li ſimili ſaranno aggiunti a ſe ſteſſi, e a quelli in tal maniera, che non abbiano fra loro, ſe non un ordine unico. Verrà tanto il bc, quando il c ſi multiplica per b, quanto il cb, quando il b ſi multiplica per c; così pure verranno tutti i terni bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, quando per qualunque delle 3. lettere ſi multiplica l'uno, e l'altro de' ſeguenti due ambi delle altre due. Ma il b^2 verrà ſolo una volta, quando il b ſi multiplica per b, e il b^3, quando per b ſi multiplica il b^2.

20. Quindi ſe ſia r il numero delle parti uguali, che devono dare il termine, onde vi debba eſſere a^{m-r}, cioè un numero $m-r$ di termini ſimili a, e tutti gli altri ſieno diſſimili; ſarà pel Corol. 2. il numero di combinazioni uguale al prodotto di un numero r di termini della progreſſione $m \,.\, m-1 \,.\, m-2$ ec., conforme alla prima regola, che dà il numeratore del coefficiente numerico. Ma ſe vi ſaranno inoltre altri termini b, c, d ec. ſimili corriſpondenti a delle parti uguali componenti il numero n, converrà inoltre dare per diviſore numerico altrettante ſerie $1 \,.\, 2 \,.\, 3$ ec., quante ſono le ſpecie di eſſe parti uguali, continuando ciaſcuna ſerie per tanti termini, quante ſono eſſe in ogni ſpecie. Queſte ſerie coll'unità meſſa per l'analogía in luogo di ogni parte ſolitaria, danno appunto il denominatore preſcritto nella regola ſeconda.

21. Corol. 1. E' coſa facile a vedere, che ove la potenza m ſia un numero determinato poſitivo intero, ſi ſcemerà la fatica di molto; giacchè dovranno rigettarſi tutti i modi di comporre il numero n, che abbiano numero di parti maggior di m; mentre in eſſi modi ſi avrebbe nel numeratore $m-m=0$: poſto poi negli altri per m il ſuo numero, ſi eliderebbero varj numeratori da' denominatori, e il calcolo diverrebbe aſſai più ſemplice.

22. Se nell'eſempio propoſto ſi cercaſſe la potenza terza;

fatto

fatto $m=3$, e rigettati tutti i modi, che ânno più di 3. parti, si rigetterebbero i modi 1, 2, 3, 5, e gli altri darebbero $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}=1$, $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1}=6$, $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}=3$, $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2}=3$, $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1}=6$, $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1}=6$, $\frac{3}{1}=3$. Quindi il membro settimo della terza potenza, ommesso anche l'a, ove sono 3 le parti per l'$a^{3-3}=a^0$ $=1$, sarebbe $(c^3+6bcd+3ad^2+3b^2e+6ace+6abf$ $+3a^2g)x^6$.

23. Corol. 2. Se l'infinitinomio non ha il primo termine mancante di x, il valore a sarà $=0$. Quindi saranno $=0$ tutti i termini, ne' quali esso vi entra, cioè tutti i termini, che ânno numero di parti corrispondenti minor di r: onde mancheranno tutti i membri appartenenti alle potenze di x minori di m. Sarà meglio in questo caso considerare l'infinitinomio ridotto a questa forma $ax+bx^2+cx^3$ ec. $=x(a+bx+cx^2$ ec.); onde elevato $a+bx+cx^2$ ec., e moltiplicato ogni termine per x^m, si avrà l'intento.

24. Corol. 3. Se nell'infinitinomio manca qualche potenza di x, nella formola generale $a+bx+cx^2$ ec. sarà $=0$ la lettera, che corrisponde a quella potenza: e però anderanno rigettati tutti que' modi di comporre il numero n, che avranno qualche parte esprimente quella potenza.

25. Corol. 4. Quindi se in cambio dell'infinitinomio si avrà un polinomio; basterà ritenere que' modi soli, ne' quali non vi è parte alcuna, che non corrisponda a qualche esponente di que' del polinomio medesimo.

26. Corol. 5. Se un polinomio finito si dovrà elevare a una potenza espressa da un numero intero positivo; la formola darà un numero finito di termini, e se la potenza la più alta di x sarà r; il membro ultimo avrà x^{mr} divenendo $=0$ qualunque

mem-

membro posteriore. Imperocchè in esso dovrebbe essere $n > mr$; onde se n si divida anche in parti uguali m; ogni parte sarà $\frac{n}{m} > r$: e però molto più, se si divida in un numero minore di parti o uguali, o disuguali, qualche parte sarà maggiore di r: quindi essa non si troverà tra gli esponenti del dato polinomio; onde quel modo di comporre il numero n dovrà rigettarsi pel Corol. 4.

27. Scolio. Converrebbe ora determinare il numero de' diversi modi, ne' quali si può comporre un dato numero da' numeri interi. Questo argomento lo tratta a lungo l'Eulero nella Introduzione *in Analysim Infinitorum* al tomo 1. capo 16., ove riduce il problema alla evoluzione della frazione

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ ec.}}$ in una serie ricorrente della forma $1 + Ax + Bx^2 \ldots\ldots + Px^n$. Fa vedere, che ogni coefficiente P mostra in quanti modi il suo compagno n possa formarsi colla addizione de' numeri interi, e ne forma la seguente tavola

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7. 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 .
1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 15 . 22 . 30 . 42 . 56 . 77 . 101 . 135 .

15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24
176 . 231 . 297 . 385 . 490 . 627 . 792 . 1002 . 1250 . 1570 .

28. Ogni numero, che sta sotto, mostra in quanti modi si possa comporre il numero, che sta sopra. Vi si vede, che pel num. 6. vi sono modi 11., quanti appunto se ne sono trovati nell' esempio proposto. Vi si scorge poi facilmente, quanto vada innanzi questo numero ne' numeri maggiori, e però quanto orribile sia la farragine de' termini, che devono nascere ne' membri un poco avvanzati. Il membro ventesimo quinto, che corris-

risponde all'x^{24} ha già più di un migliaro, e mezzo di termini. Almeno col metodo qui proposto questi, ancora si troverebbero da se senza la tanto più immensa farragine della somma di tutt i precedenti, e ciascuno di essi si avrebbe con un metodo tanto semplice, e generale.

29. Scolio 2. Questo metodo io l'ho già pubblicato nel giornale de' Letterati di Roma fino dall' anno 1747., ove in una di due susseguenti Memorie delle Riflessioni, che vi ho aggiunte, ne ho anche fatto il confronto con quello del Moivre. Ma qui l'ho dimostrato con metodo assai più semplice, e diretto, che ho ricavato dalla natura stessa dell' oggetto, prendendolo dalle formole delle combinazioni, che vi devono entrare. Succede quasi sempre anche in Geometría, e nel calcolo, che le vie più diritte, e più semplici per arrivare ad un termine nascosto sono le ultime a discuoprirsi.

IL FINE.

pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
3.	3.	le quantità	quantità
	22.	a 2 abx	a 1 abx
	26. 27.	dalle dimenfioni	delle dimenfioni
6.	20.	per l'apporfi	per l'opporfi
25.	ult.	o che	
21.	11.	$a \quad c$ / $b \quad d$	$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$
66.	ult.	ptoblema	problema
71.	26.	10.^{o}	8.^{o}
103.	4.	t	

Si incontrerà di tanto in tanto qualch'altro errore fimile a quefti, ma perciò affai facile ad avvertirfi dal lettore. Dopo le prime pagine, la revifione è ftata ben follecita, ed efatta; certi errori però, che dipendono dalla più forte, o più debole preffione del torchio, fono ftati inevitabili, ma non già fparfi in tutte le copie. A cagione d'efempio in varie copie fi vedrà alla pag 22. fegnata leggermente la lineetta, che fepara l'a dal b, in altre fi troverà chiaramente impreffa, ed in altre farà affatto fvanita.

Nell'Aggiunta pag.	lin.		
244.	22.	00153	0, 0153
	14.	-10	$-t$
	25.	$r' - t$	$r' - 9$
247.	4.	linea	virgola
252.	11.	all'	coll'
254.	13.	o così	così